LÍNEAS DE INFLUENCIA

Introducción.- La mayor aplicación de las líneas de influencia es justamente en el diseño de los puentes, particularmente en el caso de estructuras hiperestáticas.

En el pasado se recurría a tabulaciones para ciertas relaciones de luces y que permiten encontrar directamente las ordenadas de las líneas de influencia tanto para momento como para corte cada décimo de luz de tramo. En los puentes, la aplicación de estas tablas resulta limitada porque solo sirven para vigas de altura constante y determinadas relaciones de tramos.

Para vigas continuas de sección variable o constante, se recurre a una diversidad de métodos entre los que se destaca por su simplicidad el método de distribución de momentos que sirve también para el caso de estructuras aporticadas y por ello se lo estudia con detalle en el presente capítulo.

Definición.- Las líneas de influencia son gráficos a escala que permiten calcular solicitaciones ya sea de momento flexor, corte o normales en secciones específicas para cargas distribuidas o puntuales ubicadas en posiciones diversas, lo que permite establecer máximos positivos y máximos negativos de dichas solicitaciones por efecto de la carga muerta y la carga viva en su movimiento.

Líneas de Influencia para tramos Isostáticos.- A manera de repaso y como una Introducción se detallan los siguientes casos:

a) **Línea de Influencia de la Reacción de Apoyo**.- Para una distancia variable x y una carga puntual unitaria, las reacciones toman las

$$R_a = \frac{L-x}{L} \qquad R_b = \frac{x}{L}$$

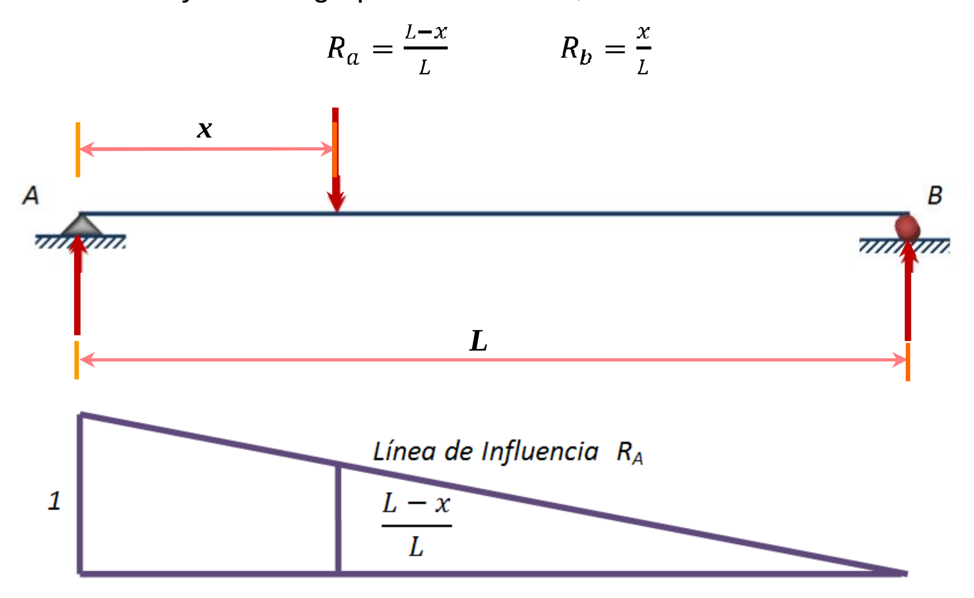


Figura 12.- Línea de Influencia de la Reacción en A

De acuerdo con la figura 12, la reaccion de apoyo en A que tambien corresponde a una fuerza cortante, esta dad por:

$$R_a = V_a = \frac{L - x}{L}$$

Ecuación lineal en la que es suficiente analizar dos puntos:

Para $x = 0$; $R_a = V_a = 1$

Para $x = L$; $R_a = V_a = 0$

b) **Líneas de Influencia del esfuerzo Cortante en una sección cualquiera.-** Las reacciones son las mismas del caso a y de acuerdo con la definición de corte, para una sección cualquiera C, se tiene que cuando la carga P = 1 se encuentra en el sector a (ver figura 13).

$$V_c = R_a - 1 = \frac{L - x}{L} - 1 = -\frac{x}{L}$$

Discutiendo la ecuación lineal anterior, se tiene:

Para $x = 0$; $V_c = 0$

Para $x = L$; $V_c = -1$

Cuando la carga P = 1 se encuentra en el sector $L - a$ se tiene:

$$V_c = R_a = \frac{L - x}{L} = 1 - \frac{x}{L}$$

Discutiendo esta ecuación:

Para $x = 0$; $V_c = 1$

Para $x = L$; $V_c = 0$

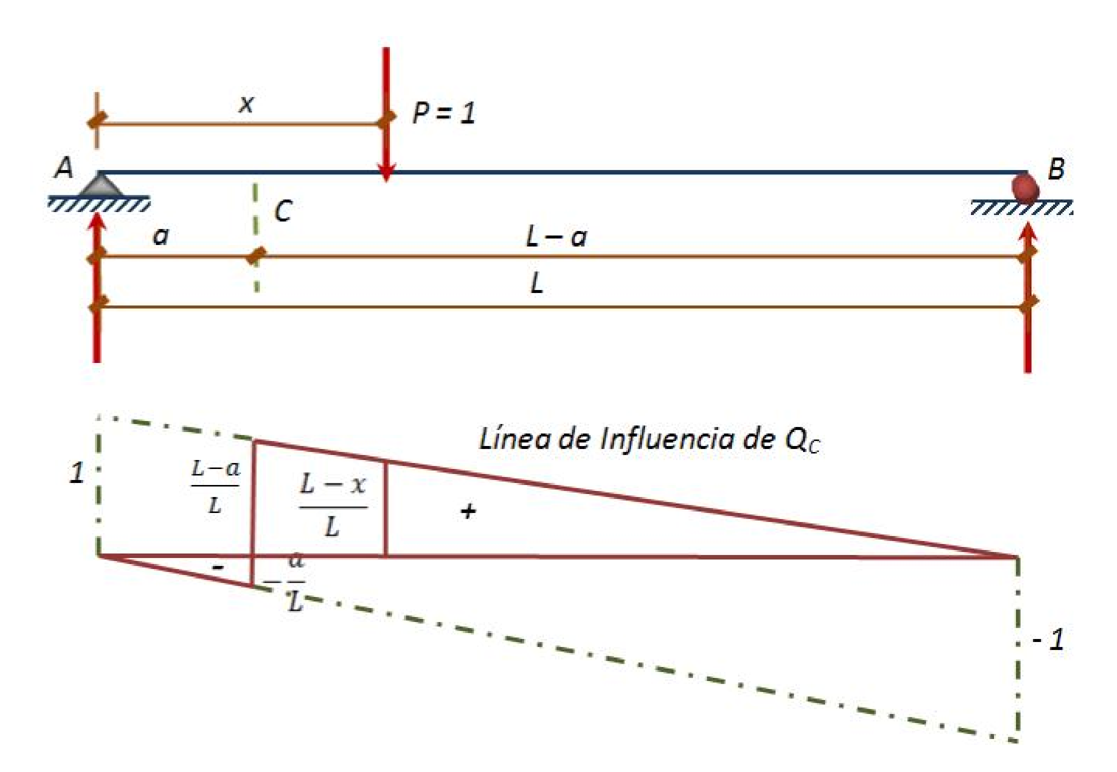


Figura 13.- Línea de Influencia del Esfuerzo Cortante

c) **Líneas de Influencia del Momento Flector en una sección cualquiera.-** En la figura 14, se analiza lo que ocurre con el momento flector en una sección C, cuando la carga P = 1, se encuentra antes y después de ella.

Cuando la carga P = 1 se encuentra en el sector a:

$$M_c = R_a * a - P * (a - x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right) * a - a + x$$

$$M_c = x * (1 - \frac{a}{L})$$

Discutiendo esta ecuación, se tiene:

Para $x = 0$; $M_c = 0$

Para $x = a$; $M_c = \frac{a*(L-a)}{L}$

Para $x = L$; $M_c = L - a$

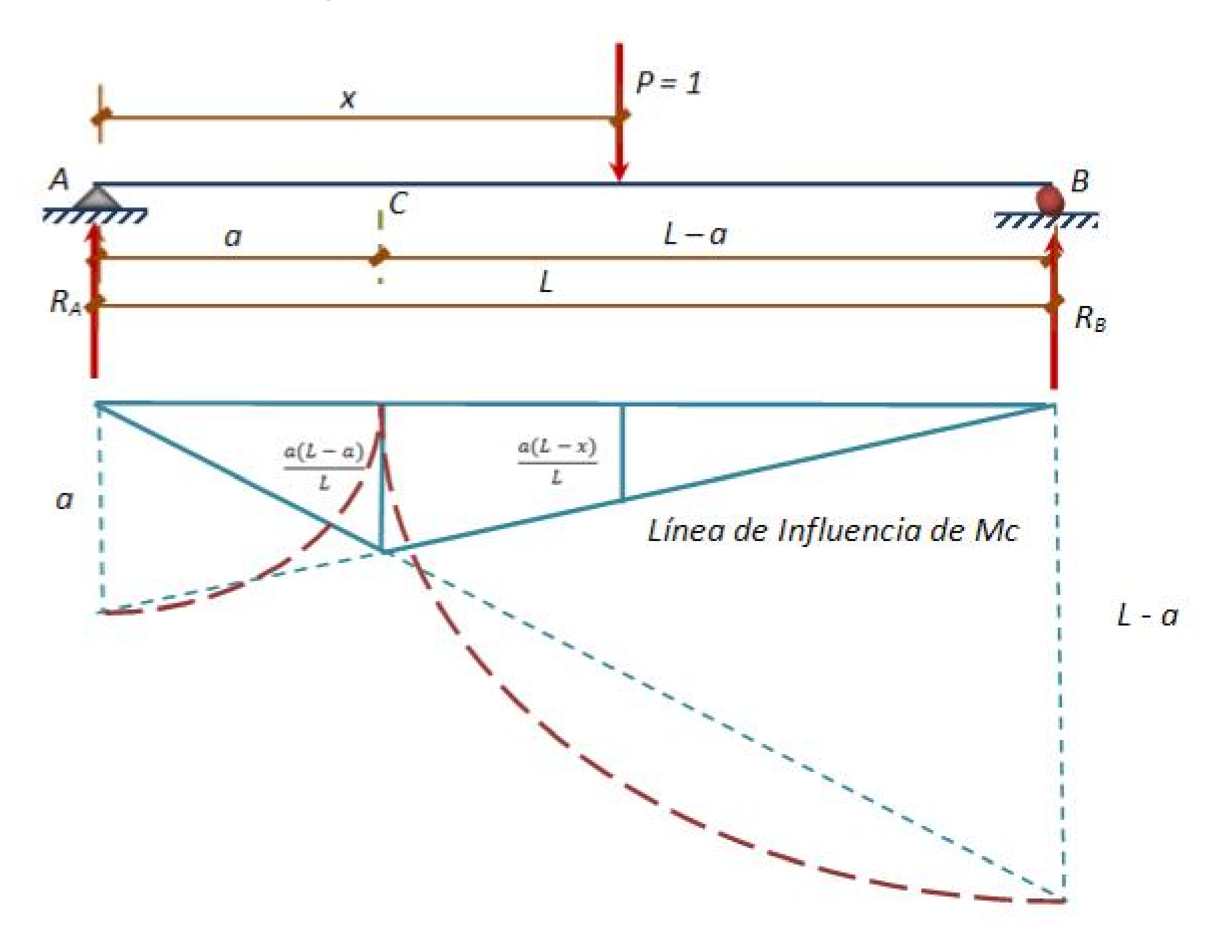


Figura 14.- Línea de Influencia del Momento Flector

Cuando la carga P = 1 se encuentre en el sector L - a

$$M_c = R_a * a = \left(1 - \frac{x}{L}\right) * a$$

Discutiendo esta ecuación, se tiene:

Para $x = 0$; $M_c = a$

Para $x = a$; $M_c = \frac{a*(L-a)}{L}$

Para $x = L$; $M_c = 0$

d) **Líneas de Influencia de los Esfuerzos Cortantes en Vigas Continuas Articuladas (Isostáticas).-** El análisis es similar por lo que en la figura 15 se muestran los gráficos de estas líneas de influencia para diferentes secciones y en la figura 16 se muestra la línea de influencia de la reacción en C que se la obtiene por la sumatoria en valor absoluto de las líneas de influencia del corte a la izquierda de C mas la línea de influencia del corte a la derecha de C.

A B C D E

a b c

L_1

1 +

Línea de Influencia de R_A

$-\frac{c}{L_1}$

Línea de Influencia de Q_B

$-\frac{c}{L_1}$

Línea de Influencia de Q_C izq.

-1

$-\frac{c}{L_1}$

Línea de Influencia de Q_C der.

-1 -1

Línea de Influencia de Q_D

-1 -1

Figura 15.- Línea de Influencia del Esfuerzo Cortante

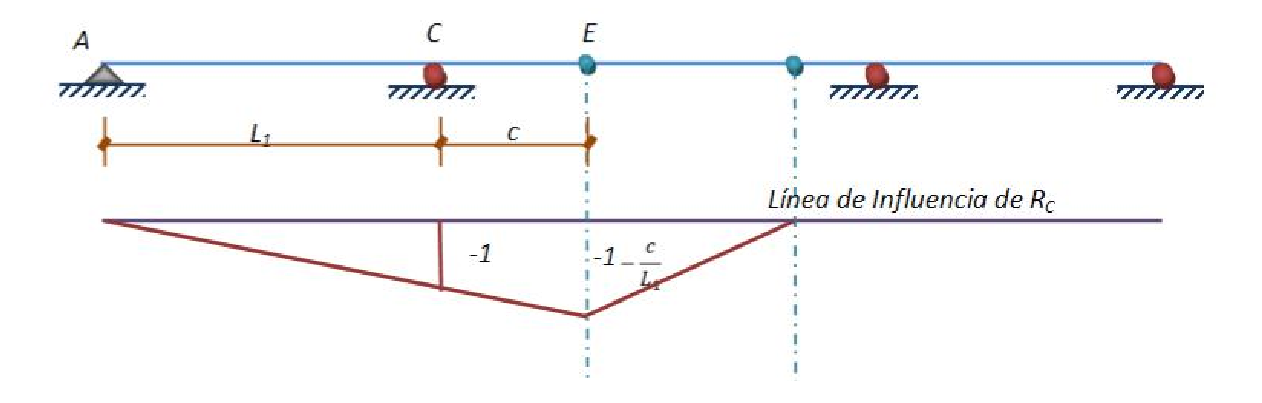


Figura 16- Línea de Influencia de la Reacción Interior

e) **Líneas de Influencia de los Momentos Flectores en Vigas Continuas Articuladas (Isostáticas)**.- Su análisis es similar al del caso c.

Para la línea de influencia en correspondencia con el apoyo interior C, lo que se hace es aplicar limites a la línea de influencia de la sección B cuando a tiene a L.

Como se puede observar en la figura 17, el resultado es que las líneas de influencia para cualquier sección de la ménsula comprendida entre C y D la línea de influencia comienza con una recta inclinada a 45°.

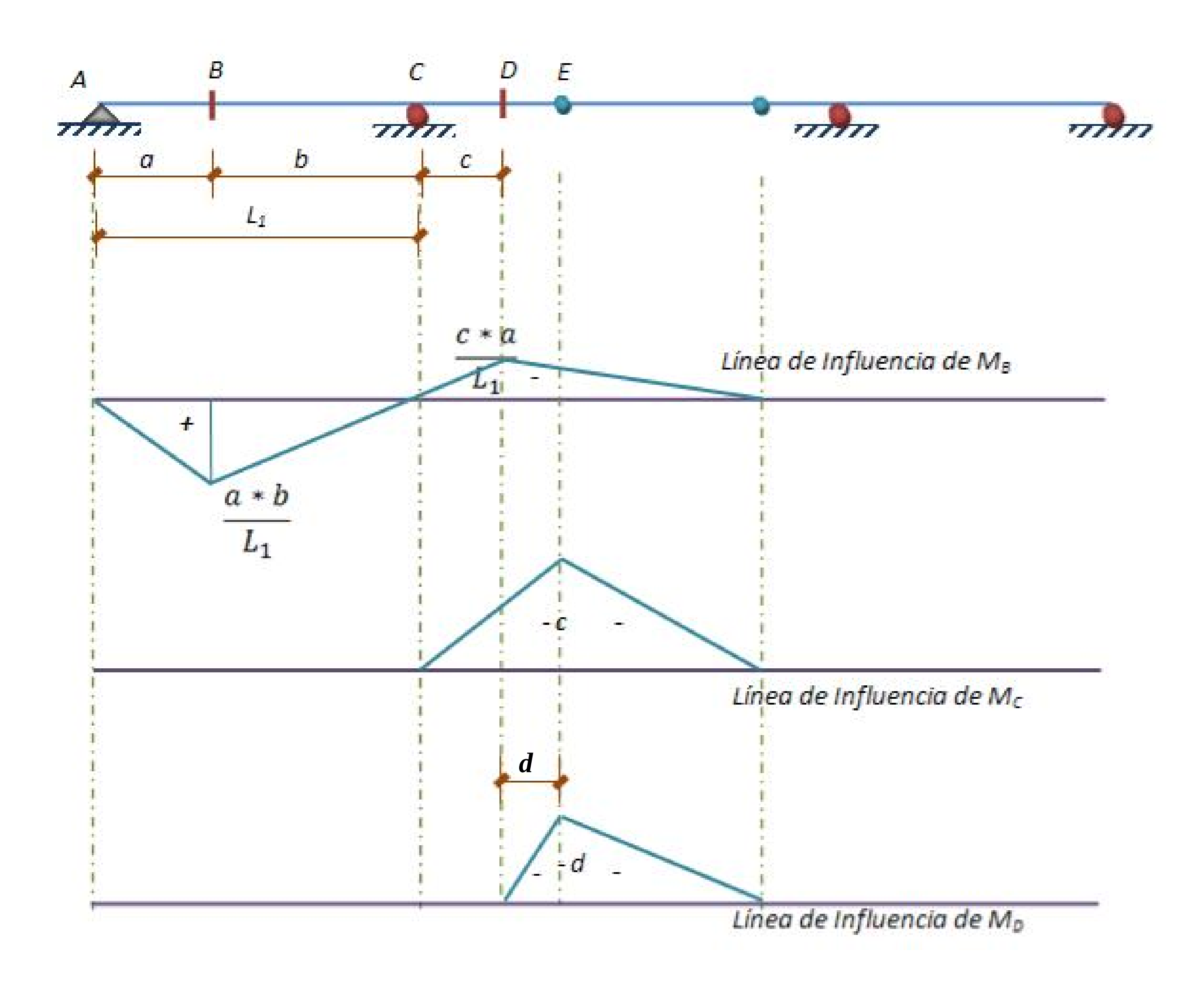


Figura 17.- Línea de Influencia del Momento Flector.

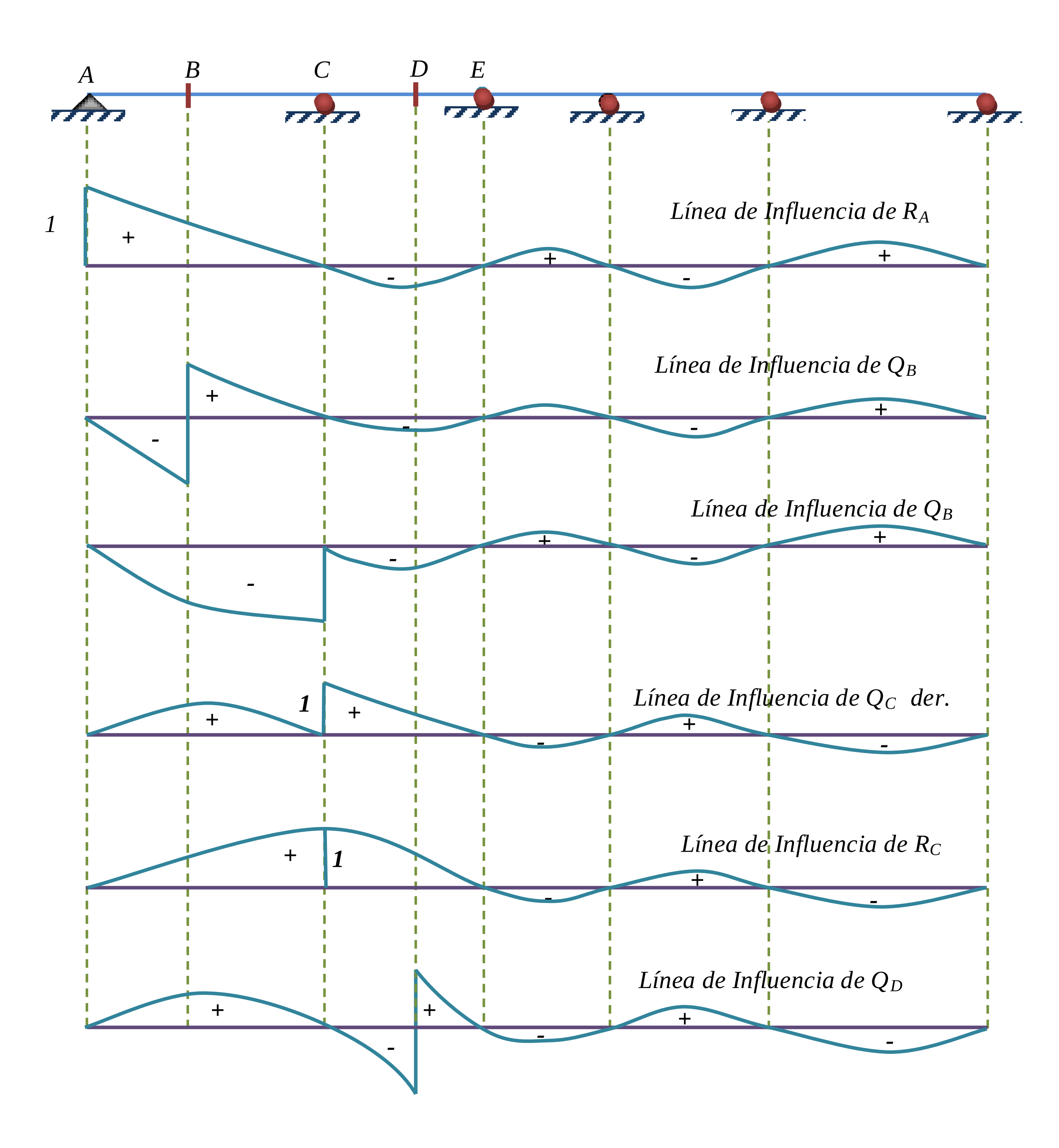


Figura 18.- Línea de Influencia de Corte y Reacciones

Líneas de Influencia para tramos Continuos Hiperestáticos.- A diferencia de los gráficos anteriores estas líneas tiene continuidad y son curvilíneas, existiendo variados procedimientos para su deducción. En forma esquemática se muestran en las figuras 18 y 19, diversos casos.

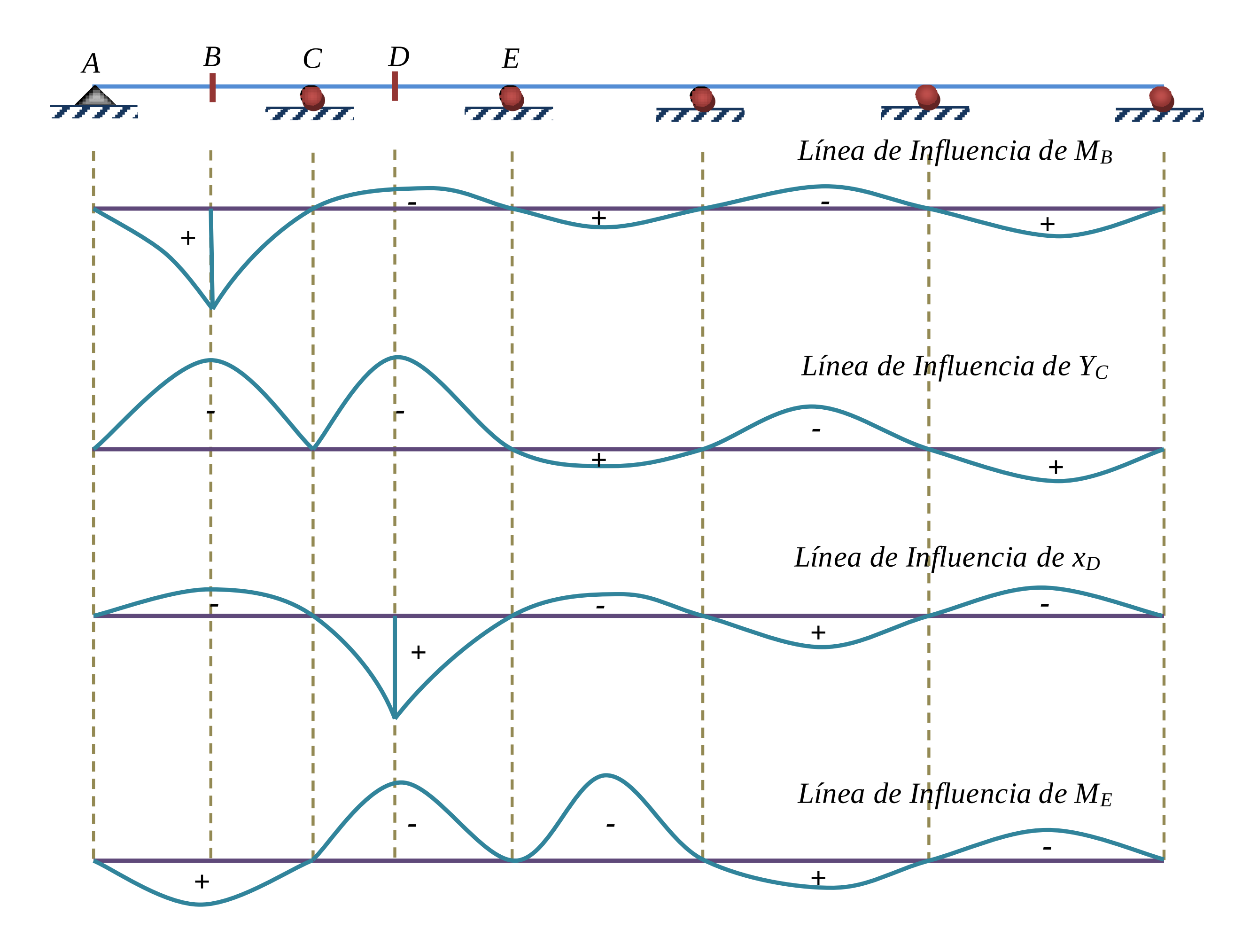


Figura 19.- Línea de Influencia de Momentos Flectores

Líneas de Influencia del Momento Flector sobre apoyo interior por el método de Distribución de Momentos.- Si los miembros de una viga son prismáticos de inercia variable o constante, se pueden deducir las líneas de influencia por el método de Cross calculando para cada caso, los coeficientes de distribución, las rigideces de los miembros y los momentos de empotramiento en base a las siguientes expresiones:

De acuerdo con la figura 20, los coeficientes de distribución están dados por:

$$C_{ab} = \frac{\int \frac{x^2 * dx}{l_x} - L \int \frac{x * dx}{l_x}}{\int \frac{x^2 * dx}{l_x}}$$

Las rigideces dadas por:

$$\frac{K_{ab} * E * l_c}{L} = \frac{E * L^2}{\int \frac{x^2 * dx}{l_x} + C_{ab} \int \frac{(L - x) * x * dx}{l_x}}$$

Los momentos de empotramiento por cargas concentradas están dados por:

$$M_{ba}\int\frac{(L-x)*x*dx}{I_x}+M_{ab}\int\frac{x^2*dx}{I_x}=-P*b*L\int\frac{x^2*dx}{I_x}-P*b_1*L\int\frac{(L-x)*x*dx}{I_x}$$

La solución de las ecuaciones integrales anteriores que se incluye al final del presente libro, ha sido programada por el autor con el nombre de LININPU.BAS y permite calcular coeficientes y momentos fijos en términos de relaciones r para las alturas *y* para la longitud de las parábolas.

En conformidad con la figura 20, los sectores parabólicos son de inercia variable, de acuerdo a las siguientes expresiones:

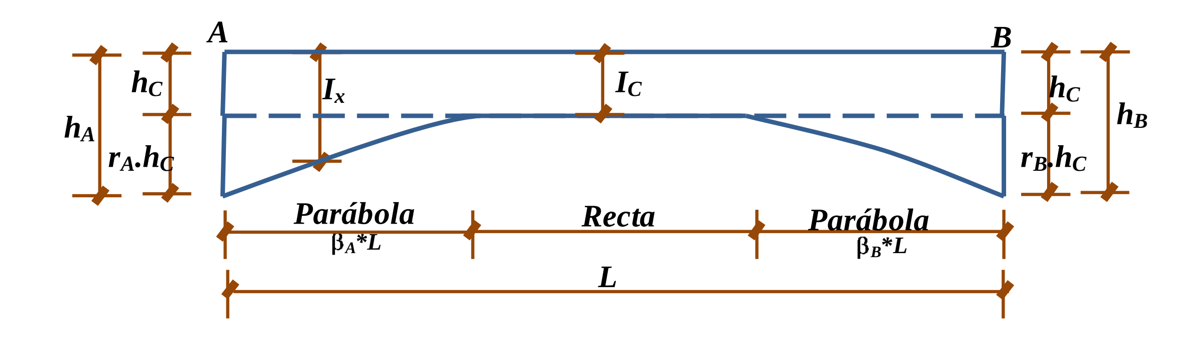


Figura 20.- Viga de Altura Variable

Entre A y β_A*L

$$I_x=I_C*\left(1+r_A*\left(1-\frac{x}{\beta_A}\right)^2\right)^3$$

Entre β_B*L *y B*

$$I_x=I_C*\left(1+r_B*\left(1-\frac{x}{\beta_B*L}\right)^2\right)^3$$

Expresiones en las cuales:

I_C = Inercia constante de la parte central.

x = Abscisas a partir de A.

x_1 = Abscisas a partir de B.

b = Distancia de la carga P al apoyo A.

b_1 = Distancia de la carga P al apoyo B.

r_A = Relación que define altura de la car.ela en A.

r_B =Relación que define altura de la canela en B.

β_A = Relación que define la longitud de la parábola de la izquierda.

β_B = Relación que define la longitud de la parábola de la derecha.

Relaciones principales para la utilización del programa LININPU.BAS.- De acuerdo con la figura 20, para el cálculo de los coeficientes de propagación, factores de rigidez y momentos fijos se requiere conocer las variaciones en términos de $\beta_A, \beta_B,\ r_A$ y r_B

Para vigas de espesor constante, se tiene:

$$r_A = \frac{h_A - h_c}{h_c} \quad \text{y} \quad r_B = \frac{h_B - h_c}{h_c}$$

De donde:

$$h_A = h_c * (1 + r_A) \quad \text{y} \quad h_B = h_c * (1 + r_B)$$

En las que

h_A = Altura total de la viga en A

h_B = Altura total de la viga en B

h_C = Altura total constante de la parte central

La utilización de este programa también puede ser extensiva a vigas placa aplicando el criterio que se explica luego y lo propio a secciones cajón en las que la aproximación puede tener errores hasta de un 5 %.

La recurrencia consiste en calcular secciones rectangulares equivalentes con las que se determina los valores de ***r_A*** y ***r_B***.

Tomando secciones rectangulares equivalentes, los momentos de inercia reales de la viga nos dan las siguientes alturas equivalentes:

$$h_A = \sqrt[3]{\frac{12 * I_a}{B}} \quad \text{y} \quad h_C = \sqrt[3]{\frac{12 * I_c}{B}}$$

Que sustituidas en las expresiones de r dan:

$$r_A = \frac{h_A - h_c}{h_c} = \frac{\sqrt[3]{\frac{12 * I_a}{B}} - \sqrt[3]{\frac{12 * I_c}{B}}}{\sqrt[3]{\frac{12 * I_c}{B}}}$$

$$r_A = \frac{\sqrt[3]{I_a} - \sqrt[3]{I_c}}{\sqrt[3]{I_c}}$$

O también:

$$r_A = \sqrt[3]{\frac{I_a}{I_c}} - 1 \quad \text{y análogamente} \quad r_A = \sqrt[3]{\frac{I_b}{I_c}} - 1$$

Relaciones que también pudieron ser obtenidas de la expresión de la ecuación del momento de inercia del tramo parabólico para $I_x = I_a$ y x = 0.

Para facilitar el cálculo de los momentos de inercia de secciones T exclusivamente se ha preparado también el programa PROGEOPU.BAS que se incluye al final del presente libro.

Ejercicio.- Calcular la altura real h_B que deberá tener *una* viga T con cartelas parabólicas si se conocen las relaciones: r_A = 0 Y r_B = 1.3

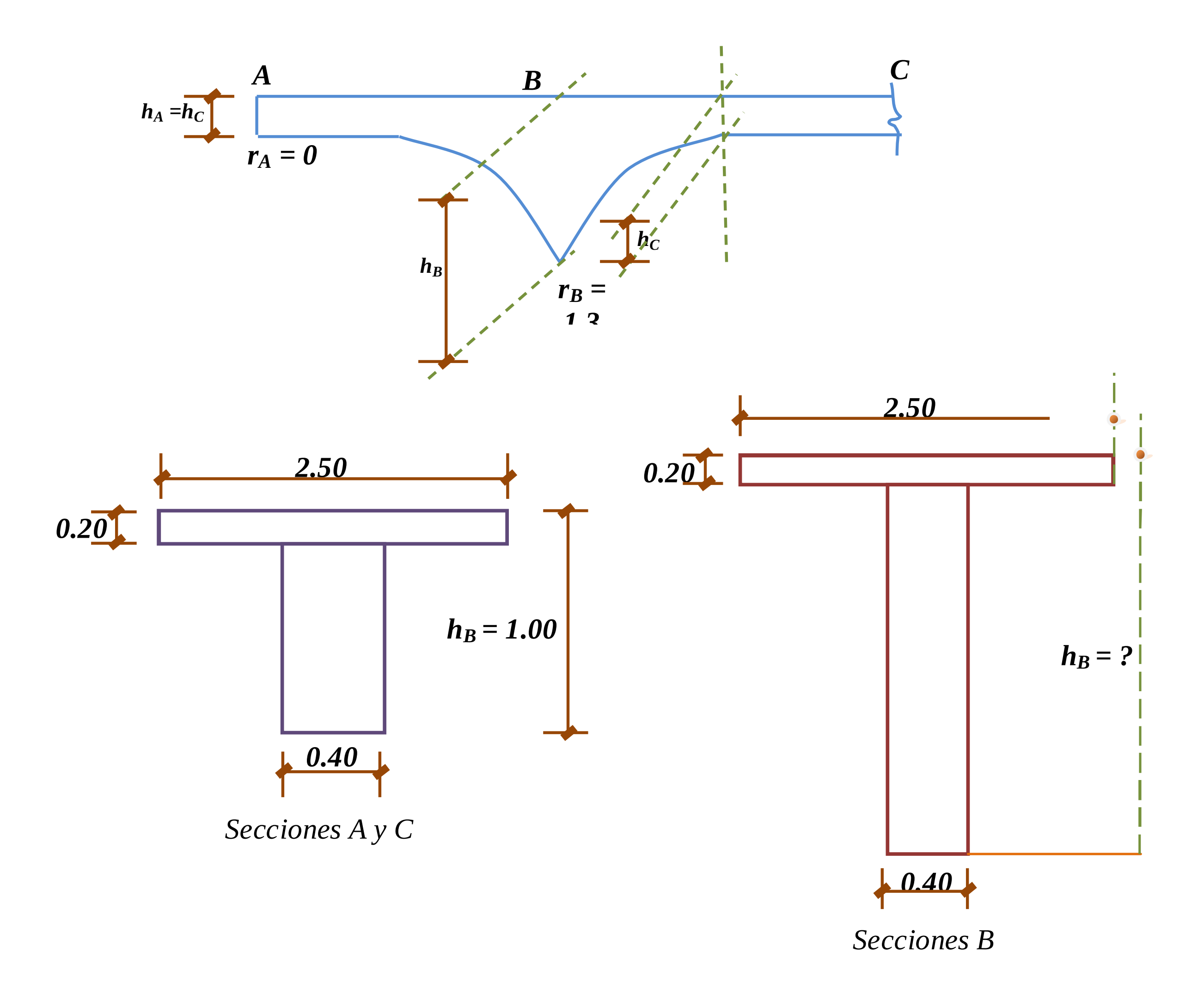


Figura 21.- Viga Placa de Altura Variable

De acuerdo con la figura 21 las alturas de la viga en el apoyo A y en el tramo central valen 1.0 m., y en toda la viga el espesor de losa 0.2 m., ancho de nervio 0.4 m. y ancho útil de losa 2.5 m.

Para las secciones A y C, la inercia es:

$$I_a = I_c = 0.06751 \text{ m}^4$$

En cambio la inercia requerida por la sección B será:

$$I_b = I_a * (1 + r_B) = 0.06751 * (1 + 1.3)^3 = 0.82139 \text{ m}^4$$

Con la ayuda del programa PROGEOPU.BAS se puede tantear las veces que sea necesario hasta conseguir la inercia anterior sin embargo ya una

primera idea de la altura se la obtiene asumiendo que se trata de viga con espesor constante lo que en el presente caso representaría comenzar el tanteo con 2.3 m. y concluyendo, que por tratarse de una sección T conviene adoptar 2.4 m.

Valores de r aconsejables para diferentes tipos de Puentes.- Para la viga de la figura 22, las reacciones para el predimensionamiento de las superestructuras tanto de hormigón armado como de hormigón pretensado son las siguientes:

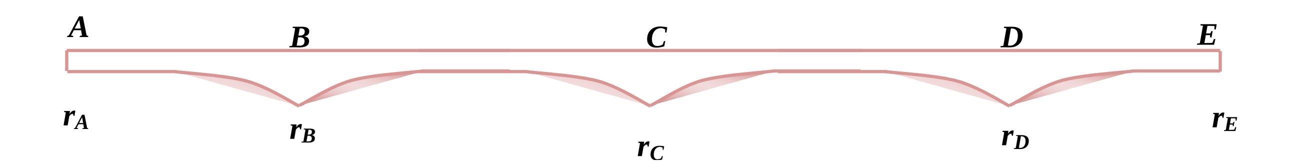


Figura 22.- Relaciones r para diferentes Longitudes.

En losas con luces menores a 10 m.

$$r_A = r_B = r_C = r_D = r_E = 0$$

En losas con luces mayores a 10 m.

$$r_A = r_E = 0; \qquad r_B = r_C = r_D = 0.4$$

En puentes de viga y losa

$$r_A = r_E = 0; \qquad r_B = r_D = 1.3; \qquad r_C = 1.5$$

En puentes con secciones cajón (volados sucesivos).

$$r_A = r_E = 0; \qquad r_B = r_D = 1.6 \ a \ 1.7 \ ; \qquad r_C = 1.8$$

Por razones arquitectónicas, se puede dar a los apoyos extremos o también igualar todas las relaciones r interiores.

Términos complementarios al método de distribución de Momentos.- Las rigideces para una viga articulada en un extremo y empotrada en el otro (figura 23) están dadas por:

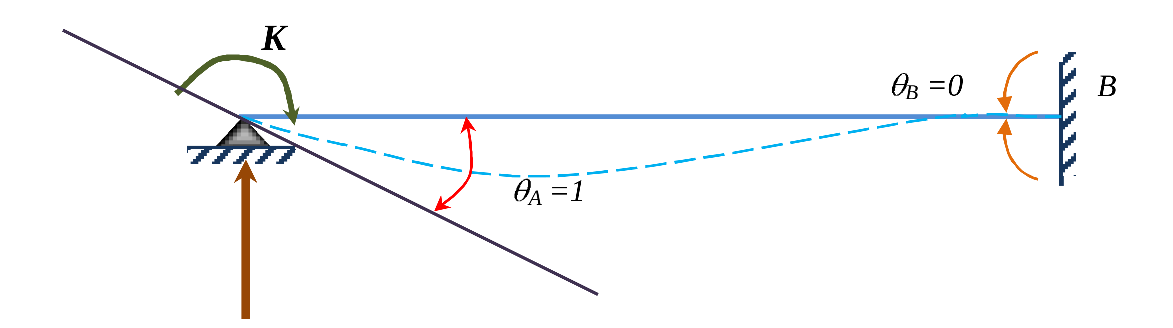


Figura 23.- Viga de Borde.

$$K = 2 * \frac{E * l}{L} * (2 * \theta_A + \theta_B)$$

$$K = 4 * \frac{E * l}{L}$$

Generalizando:

$$K = k * \frac{E * l}{L}$$

Con lo que se calculan los factores de distribución.

$$D = \frac{K}{\sum K} = \frac{k * \frac{I_c * E}{L}}{\sum k * \frac{I_c * E}{L}} = \frac{\frac{k}{L}}{\sum \frac{k}{L}}$$

Para no propagar los momentos distribuidos al apoyo articulado, el valor de k corregido esta dado por:

$$K' = (1 - C_{ab} * C_{ba}) * K_{ba}$$

En estas expresiones:

K = Factores de rigidez

k = Factores relativos de rigidez

E = Modulo de elasticidad

I = Momento de Inercia

L = Luz del tramo

C = Coeficientes de distribución

Ejercicio.- Hallar por el método de distribución de momentos, la línea de influencia del momento flector sobre el apoyo interior B de la viga cuyas dimensiones y elaciones r se dan en la figura 24.

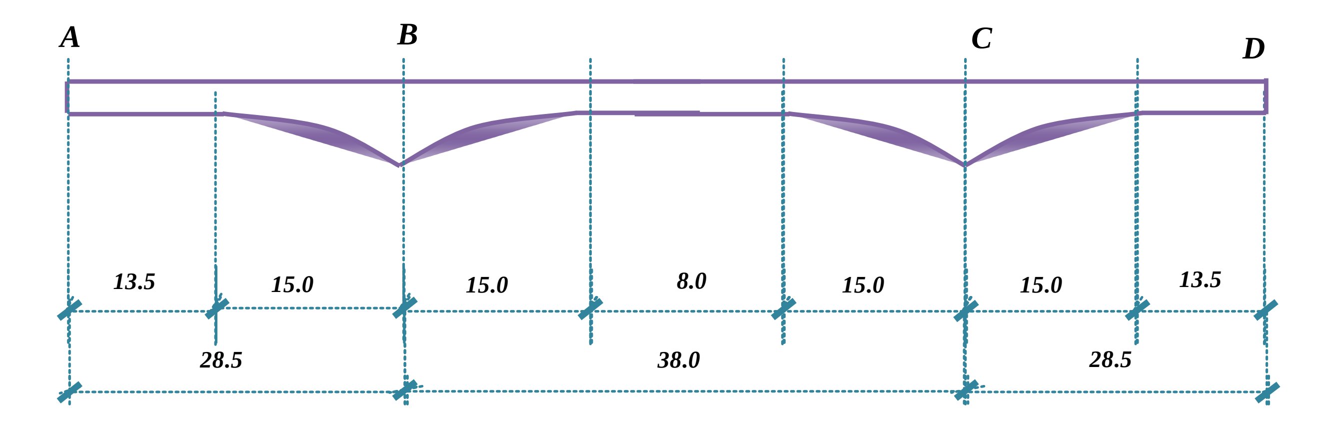


Figura 24.- Viga Simétrica de tres Tramos.

Aplicando el programa LININPU.BAS se tiene que:

En el tramo AB:

$$r_A = 0 \quad ; \quad r_B = 1.3$$

$$\beta_A = 0 \quad ; \quad \beta_B = 0.526$$

Se obtiene:

$$C_{ab} = -0.9291 \quad ; \quad C_{ba} = -0.4070$$

$$k_{ab} = 5.0023 \quad ; \quad k_{ba} = 11.4209$$

$$k'_{ba} = 7.1023$$

En el tramo BC:

$$r_B = \quad r_C = 1.4$$

$$\beta_B = \beta_C = 0.395$$

Se obtiene:

$$C_{ab} = \quad C_{ba} = -0.7240$$

$$k_{ab} = k_{ba} = 12.3793$$

Tomando la rigidez corregida del tramo AB, se procede al cálculo de los coeficientes de distribución.

$$D_{ba} = \frac{\frac{7.1023}{28.5}}{\frac{7.1023}{28.5} + \frac{12.3793}{38.0}} = 0.4334$$

$$D_{bc} = \frac{\frac{12.3793}{38.0}}{\frac{7.1023}{28.5} + \frac{12.3793}{38.0}} = 0.5666$$

(C = 0.724)					
Distribución	**0.4334**	**0.5666**		**0.5666**	**0.4334**
Momento Fijo	**-1.000**				
	0.433	0.567	$\rightarrow$	0.411	
		-0.169	$\leftarrow$	0.233	- 0.178
	0.073	0.096	$\rightarrow$	0.096	
		-0.028	$\leftarrow$	-0.039	- 0.030
	0.012	0.016	$\rightarrow$	0.012	
		-0.005	$\leftarrow$	-0.007	- 0.005
	0.002	0.003	$\rightarrow$	0.002	
		-0.001	$\leftarrow$	-0.001	- 0.001
	0.000		0.001		
M_{ba}	-0.480	0.480		0.214	- 0.214

Se aplica un momento unitario de signo negativo a la izquierda del apoyo B y se lo distribuye por el procedimiento de Cross.

En forma similar se va colocando los momentos unitarios negativos a la derecha del apoyo B con lo que el Cross anterior al pasar el momento fijo a la derecha, la acumulada de valores nos dará:

M_{bc} $\quad 0.520| - 0.520 \qquad\qquad 0.214| - 0.214$

Y lo propio cuando el momento unitario se lo aplica a la izquierda de C, por simetría en el presente caso se tiene:

M_{cb} $\quad -\ 0.214|0.214 \qquad\qquad -\ 0.520|0.520$

Y finalmente cuando el momento unitario se lo aplica a la derecha de C:

M_{cd} $\quad -\ 0.214|0.214 \qquad\qquad 0.480| - 0.480$

En consecuencia la ecuación de la línea de influencia de momentos flexores en el apoyo B, está dada por los momentos fijos afectados por los coeficientes de la columna que corresponde al apoyo B, es decir:

$$M_b = -0.480 * MF_{ba} + 0.520 * MF_{bc} - 0.214 * MF_{cb} - 0.214 * MF_{cd}$$

Nuevamente se recurre al programa LININPU para calcular los momentos fijos, que en el presente ejemplo se los calcula cada décimo de la luz de cada tramo, tomando los momentos corregidos para los tramos de borde.

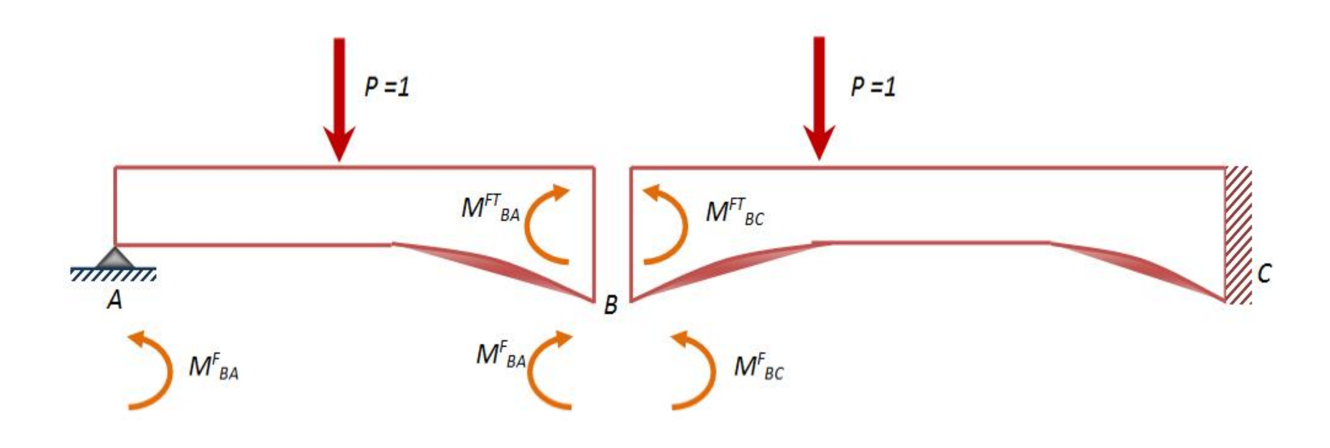


Figura 25.- Corrección para el Tramo de Borde.

$$MF'_{ba} = MF_{ab} + C_{ab} + MF_{ba}$$

Tramo AB = CD = 28.5 m.

$r_A = 0$; $r_B = 1.4$; $\beta_A = 0$; $\beta_B = 0.526$

0.1:	0.0917 * 28.5 = 2.6135
0.2:	0.1764 * 28.5 = 5.0274
0.3:	0.2468 * 28.5 = 7.0338
0.4:	0.2959 * 28.5 = 8.4332
0.5:	0.3156 * 28.5 = 8.9946
0.6:	0.3025 * 28.5 = 8.6213
0.7:	0.2609 * 28.5 = 7.4357
0.8:	0.1943 *28.5 = 5.5376
0.9:	0.1066* 28.5 = 3.0381

Tramo BC = 38.0 m.

$r_B = r_C = 1.4$; $\beta_B = \beta_C = 0.395$

0.1: - 0.0977 * 38.0 = - 3.7126

0.2: - 0.1695 * 38.0 = - 6.4410

0.3: - 0.2082 * 38.0 = - 7.9116

0.4: - 0.2084 * 38.0 = - 7.9192

0.5: - 0.1676 * 38.0 = - 6.3688

0.6: - 0.1096 * 38.0 = - 4.1648

0.7: - 0.0620 * 38.0 = - 2.3560

0.8: - 0.0290 * 38.0 = - 1.1020

0.9: - 0.0100 * 38.0 = - 0.3800

Valores que se los reemplaza en la fórmula establecida anteriormente aplicándolos a las planillas electrónicas con lo que los resultados de la última columna corresponden a las ordenadas de la línea de influencia de los momentos en el apoyo B.

Con la ventaja adicional que estas ordenadas pueden ser graficadas directamente con la impresora.

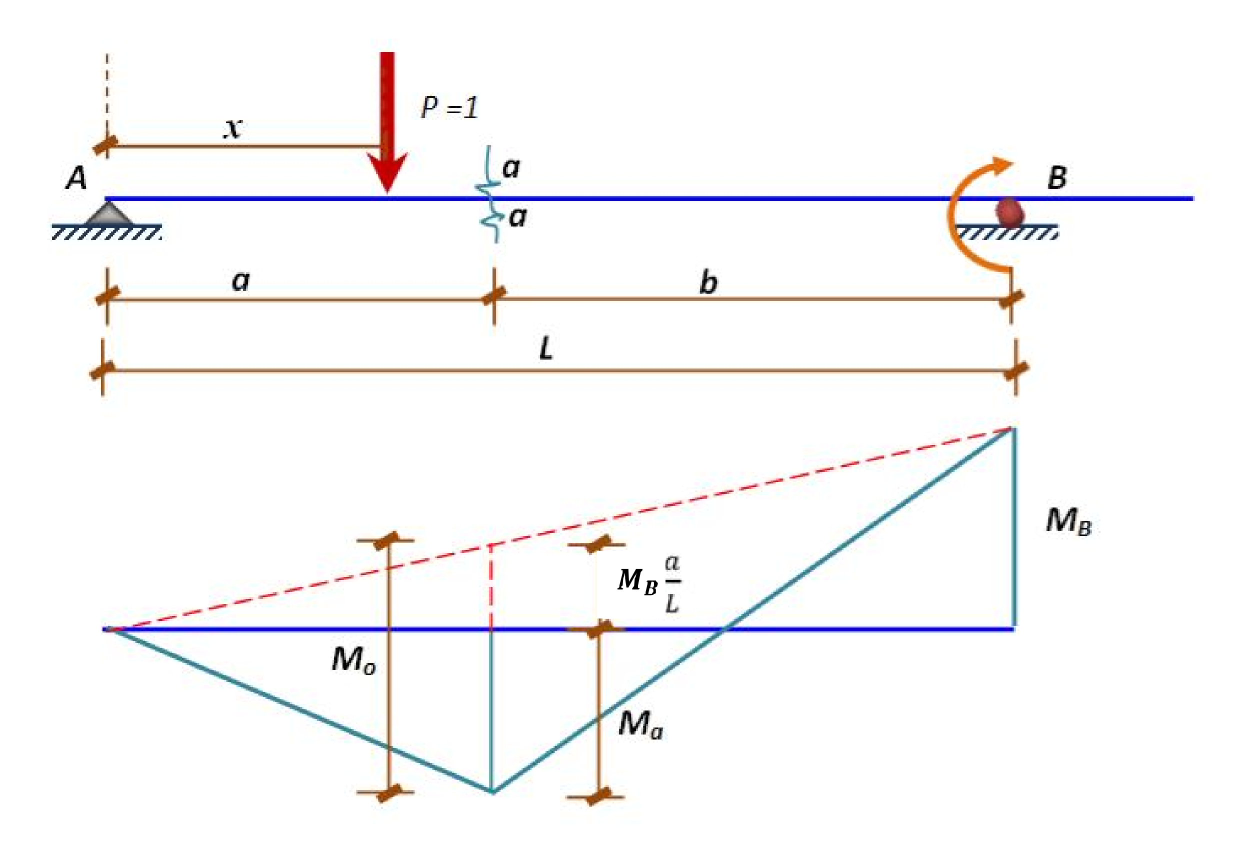


Figura 26.- Superposición de Diagramas.

LÍNEA DE INFLUENCIA DE MOMENTO EN EL APOYO B									
SECCIÓN	MF_{DC}	MF_{DC}	MF_{CD}	MF_{CD}	$-0.48 * MF_{DC}$	$0.52 * MF_{DC}$	$-0.214 * MF_{CD}$	$-0.214 * MF_{DC}$	M_o
A	0.0000				0.0000				0.0000
2.85	2.6135				-1.2545				**-1.2545**
5.70	5.0274				-2.4132				**- 2.4132**
8.55	7.0338				-3.3762				**- 3.3762**
11.40	8.4332				-4.0479				**- 4.0479**
14.25	8.9946				-4.3174				**- 4.3174**
17.10	8.6213				-4.1382				**- 4.1382**
19.95	7.4357				-3.5691				**- 3.5691**
22.88	5.5376				-2.6580				**- 2.6580**
25.65	3.0381				-1.4583				**- 1.4583**
B	0.0000	0.0000	0.0000						
32.30		-3.7126	0.3800			-1.9306	-0.0813		**- 2.0119**
36.10		-6.4410	1.1020			-3.3493	-0.2358		**- 3.5851**
39.90		-7.9116	2.3560			-4.1140	-0.5042		**- 4.6182**
43.70		-7.9192	4.1648			-4.1180	-0.8913		**- 5.0093**
47.50		-6.3688	6.3688			-3.3118	-1.3629		**- 4.6747**
51.30		-4.1648	7.9192			-2.1657	-1.6947		**- 3.8604**
55.10		-2.3560	7.9116			-1.2251	-1.6931		**- 2.9182**
58.90		-1.1020	6.4410			-0.5730	-1.3784		**- 1.9514**
62.70		-0.3800	3.7126			-0.1976	-0.7945		**- 0.9921**
C		0.0000	0.0000	0.0000		0.0000	0.0000	0.0000	**0.0000**
69.35				-3.0381				0.6502	**0.6502**
72.20				-5.5376				1.1850	**1.1850**
75.05				-7.4357				1.5912	**1.5912**
77.90				-8.6213				1.8450	**1.8450**
80.75				-8.9946				1.9248	**1.9248**
83.60				-8.4332				1.8047	**1.8047**
86.45				-7.0338				1.5052	**1.5052**
89.30				-5.0274				1.0759	**1.0759**
92.15				-2.6135				0.5593	**0.5593**
D				0.0000				0.0000	**0.0000**

Una vez obtenidas las líneas de influencia sobre los apoyos interiores es posible generar las líneas de influencia tanto para el corte como para el momento flexor en cualquier otra sección mediante la superposición de diagramas según se detalla a continuación.

Líneas de influencia del momento flexor en una sección cualquiera del tramo de borde.- Con ayuda de la figura 26, se obtiene la siguiente expresión:

$$M_a = M_o + \frac{a}{L} M_b$$

Donde:

$\boldsymbol{M_o}$ = Ordenada de la línea de influencia isostática.

M_b = Ordenada del momento en el apoyo B.

a = Distancia izquierda de la sección en estudio.

L = Longitud del tramo.

M_a = Ordenada de la línea de influencia en la sección a - a.

Siguiendo con el ejemplo anterior, se calcula ahora la línea de influencia del momento flexor en una sección *a = 0.4*L* del tramo de borde.

$$a = 0.4 * 28.5 = 11.4\ m.$$

Según la figura 27, la ordenada máxima del diagrama isostático está dada por:

$$\frac{11.4 * 17.1}{28.5} = 6.84\ m.$$

Por proporcionalidad se deducen las ordenadas en secciones cada 0.1*L

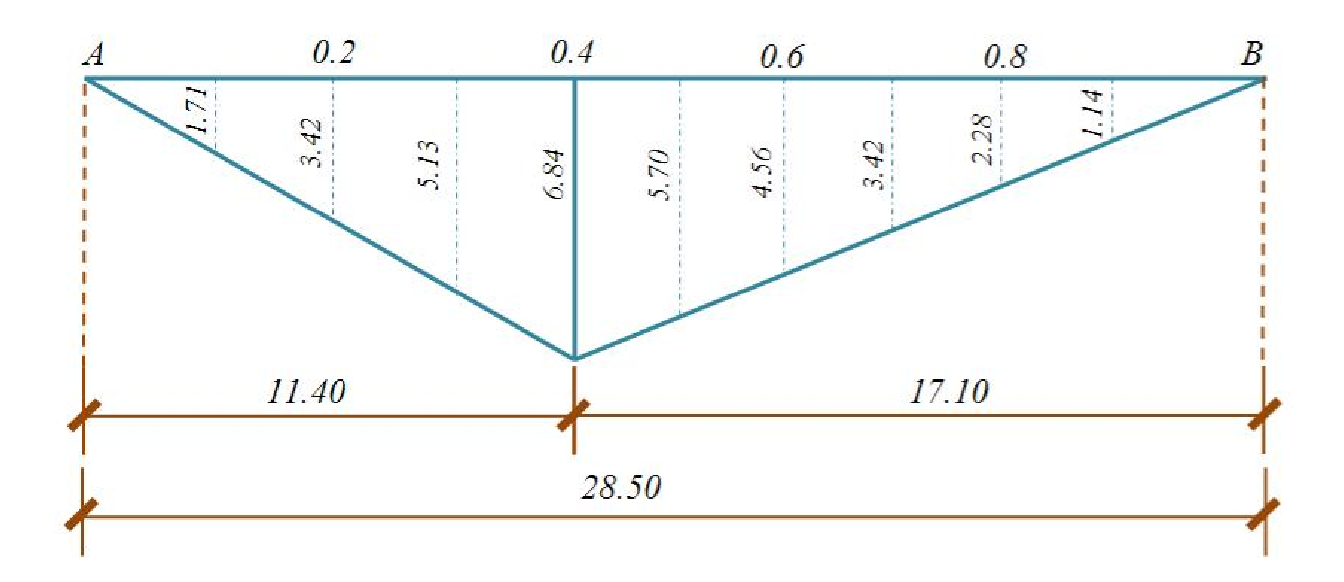


Figura 27.- Línea de Influencia Isostática a 0.4 de L.

La ecuación de superposición para este ejemplo estará dad por:

$$M_{ab}^{0.4} = M_o + 0.4 * M_b$$

Con la planilla electrónica se obtiene:

LÍNEA DE INFLUENCIA DE MOMENTO A 0.4 DE AB				
SECCIÓN	M_b	M_o	$0.4 * M_b$	$M_{ab}^{0.4}$
A	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2.85	-1.2545	1.7100	-0.5018	1.2082
5.70	-2.4132	3.4200	-0.9653	2.4547
8.55	-3.3762	5.1300	-1.3505	3.7795
11.40	-4.0479	6.8400	-1.6192	5.2208
14.25	-4.3174	5.7000	-1.7270	3.9730
17.10	-4.1382	4.5600	-1.6553	2.9047
19.95	-3.5691	3.4200	-1.4277	1.9923
22.80	-2.6580	2.2800	-1.0632	1.2168
25.65	-1.4583	1.1400	-0.5833	0.5567
B	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
32.30	-2.0119		-0.8047	0.8047
36.10	-3.5851		-1.4341	-1.4341
39.90	-4.6182		-1.8473	-1.8473
43.70	-5.0093		-2.0037	-2.0037
47.50	-4.6747		-1.8699	-1.8699
51.30	-3.8604		-1.5442	-1.5442
55.10	-2.9182		-1.1673	-1.1673
58.90	-1.9514		-0.7806	-0.7806
62.70	-0.9921		-0.3968	-0.3968
C	0.0000		0.0000	0.0000
69.35	0.6502		0.2601	0.2601
72.20	1.1850		0.4740	0.4740
75.05	1.5912		0.6365	0.6365
77.90	1.8450		0.7380	0.7380
80.75	1.9248		0.7699	0.7699
83.60	1.8047		0.7219	0.7219
86.45	1.5052		0.6021	0.6021
89.30	1.0759		0.4303	0.4303
92.15	0.5593		0.2237	0.2237
D	0.0000		0.0000	0.0000

Línea de Influencia del Momento Flector en una sección cualquiera de un tramo Interior.- Al igual que en el caso anterior, basados ahora en la figura 28, se tiene:

LÍNEA DE INFLUENCIA DE MOMENTO A 0.4 DE BC						
SECCIÓN	M_b	M_c	M_o	$0.6 * M_b$	$0.4 * M_c$	$M_{bc}^{0.4}$
A	**0.0000**	**0.0000**		**0.0000**	**0.0000**	**0.0000**
2.85	-1.2545	0.5593		-0.7527	0.2237	-0.5290
5.70	-2.4132	1.0759		-1.4479	0.4303	-1.0176
8.55	-3.3762	1.5052		-2.0257	0.6021	-1.4236
11.40	-4.0479	1.8047		-2.4288	0.7219	-1.7069
14.25	-4.3174	1.9248		-2.5904	0.7699	-1.8205
17.10	-4.1382	1.8450		-2.4829	0.7380	-1.7450
19.95	-3.5691	1.5912		-2.1415	0.6365	-1.5050
22.88	-2.6580	1.1850		-1.5948	0.4740	-1.1208
25.65	-1.4583	0.6502		-0.8750	0.2601	-0.6149
B	**0.0000**	**0.0000**	**0.0000**	**0.0000**	**0.0000**	**0.0000**
32.30	-2.0119	-0.9921	2.2800	-1.2071	-0.968	0.6760
36.10	-3.5851	-1.9514	4.5600	-2.1511	-0.7806	1.6283
39.90	-4.6182	-2.9182	6.8400	-2.7709	-1.1673	2.9018
43.70	-5.0093	-3.8604	9.1200	-3.0056	-1.5442	4.5703
47.50	-4.6747	-4.6747	7.6000	-2.8048	-1.8699	2.9253
51.30	-3.8604	-5.0093	6.0800	-2.3162	-2.0037	1.7601
55.10	-2.9182	-4.6182	4.5600	-1.7509	-1.8473	0.9618
58.90	-1.9514	-3.5851	3.0400	-1.1709	-1.4341	0.4351
62.70	-0.9921	-2.0119	1.5200	-0.5953	-0.8047	0.1200
C	**0.0000**	**0.0000**	**0.0000**	**0.0000**	**0.0000**	**0.0000**
69.35	0.6502	-1.4583		0.3901	-0.5833	-0.1932
72.20	1.1850	-2.6581		0.7110	-1.0632	-0.3522
75.05	1.5912	-3.5691		0.9547	-1.4277	-0.4729
77.90	1.8450	-4.1382		1.1070	-1.6553	-0.5483
80.75	1.9248	-4.3174		1.1549	-1.7270	-0.5721
83.60	1.8047	-4.0479		1.0828	-1.6192	-0.5364
86.45	1.5052	-3.3762		0.9031	-1.3505	-0.4474
89.30	1.0759	-2.4131		0.6455	-0.9653	-0.3197
92.15	0.5593	-1.2545		0.3356	-0.5018	-0.1662
D	**0.0000**	**0.0000**	**0.0000**	**0.0000**	**0.0000**	**0.0000**

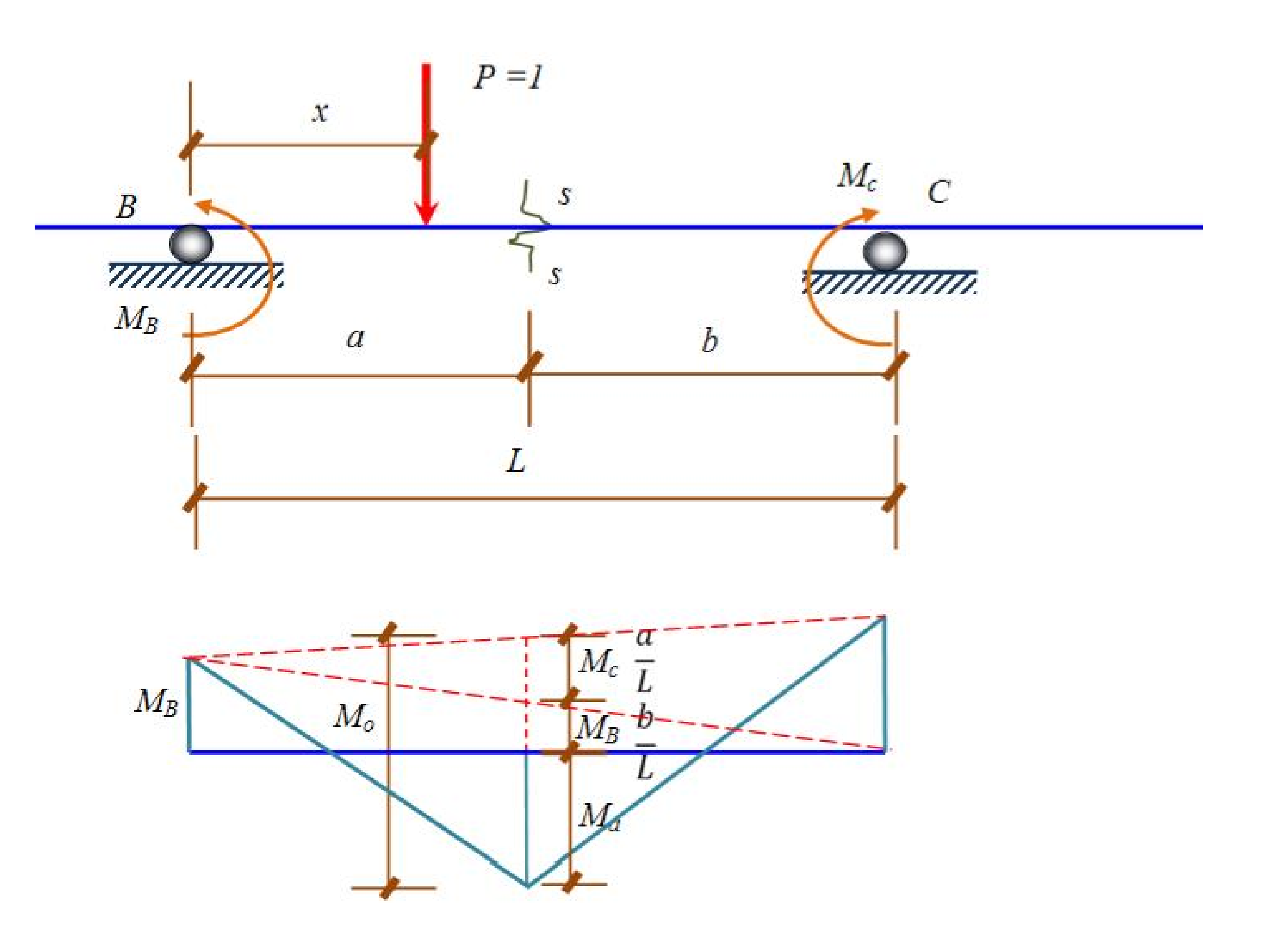


Figura 28.- Superposición de Diagramas de Momento

$$M_a = M_o + \frac{b}{L} * M_b + \frac{a}{L} * M_c$$

Continuando con el ejemplo anterior, para una sección ubicada a 0.4 * L = 0.4 * 38 = 15.2 m. en el tramo central.

$$M_{bc}^{0.4} = M_o + 0.6 * M_b + 0.4 * M_c$$

Valores que se resuelven con ayuda de la planilla que se muestra en la hoja anterior.

Línea de Influencia del Esfuerzo cortante en una sección cualquiera.- Aplicando el procedimiento de superposición, se tiene de acuerdo con la figura 29:

LÍNEA DE INFLUENCIA DE CORTE 0.4 DE BC					
SECCIÓN	M_b	M_C	V_O	$\frac{M_C - M_b}{38}$	$V_{bc}^{0.4}$
A	**0.0000**	**0.0000**		**0.0000**	**0.0000**
2.85	-1.2545	0.5593		0.0477	0.0477
5.70	-2.4132	1.0759		0.0918	0.0918
8.55	-3.3762	1.5052		0.1285	0.1285
11.40	-4.0479	1.8047		0.1540	0.1540
14.25	-4.3174	1.9248		0.1643	0.1643
17.10	-4.1382	1.8450		0.1575	0.1575
19.95	-3.5691	1.5912		0.1358	0.1358
22.88	-2.6580	1.1850		0.1011	0.1011
25.65	-1.4583	0.6502		0.0555	0.0555
B	**0.0000**	**0.0000**	**0.0000**	**0.0000**	**0.0000**
32.30	-2.0119	-0.9921	-0.1000	0.0268	-0.0732
36.10	-3.5851	-1.9514	-0.2000	0.0430	-0.1570
39.90	-4.6182	-2.9182	-0.3000	0.0447	-0.2553
43.70	-5.0093	-3.8604	-0.4000	0.0302	0.3698
47.50	-5.0093	-3.8604	0.6000	0.0302	0.6302
51.30	-4.6747	-4.6747	0.5000	0.0000	0.5000
55.10	-3.8604	-5.0093	0.4000	-0.0302	0.3698
58.90	-2.9182	-4.6182	0.3000	-0.447	0.2553
62.70	-1.9514	-3.5851	0.2000	-0.0430	0.1570
	-0.9921	-2.0119	0.1000	-0.0268	0.0732
C	**0.0000**	**0.0000**	**0.0000**	**0.0000**	**0.0000**
69.35	0.6502	-1.4583		-0.0555	-0.0555
72.20	1.1850	-2.6581		-0.1011	-0.1011
75.05	1.5912	-3.5691		-0.1358	-0.1358
77.90	1.8450	-4.1382		-0.1575	-0.1575
80.75	1.9248	-4.3174		-0.1643	-0.1643
83.60	1.8047	-4.0479		-0.1540	-0.1540
86.45	1.5052	-3.3762		-0.1285	-0.1285
89.30	1.0759	-2.4131		-0.0918	-0.0918
92.15	0.5593	-1.2545		-0.0477	-0.0477
D	**0.0000**	**0.0000**		**0.0000**	**0.0000**

Para una sección cualquiera del tramo de borde:

$$V_a = V_o + \frac{M_b}{L}$$

y para una sección cualquiera del tramo central.

$$V_a = V_o - \frac{M_b}{L} + \frac{M_c}{L} = V_o - \frac{M_c - M_b}{L}$$

Para completar los ejemplos se calcula ahora la línea de influencia del esfuerzo cortante en una sección ubicada a 0.4*L en el tramo central.

$$V_{bc}^{0.4} = V_o^{0.4} + \frac{M_c - M_b}{38.0}$$

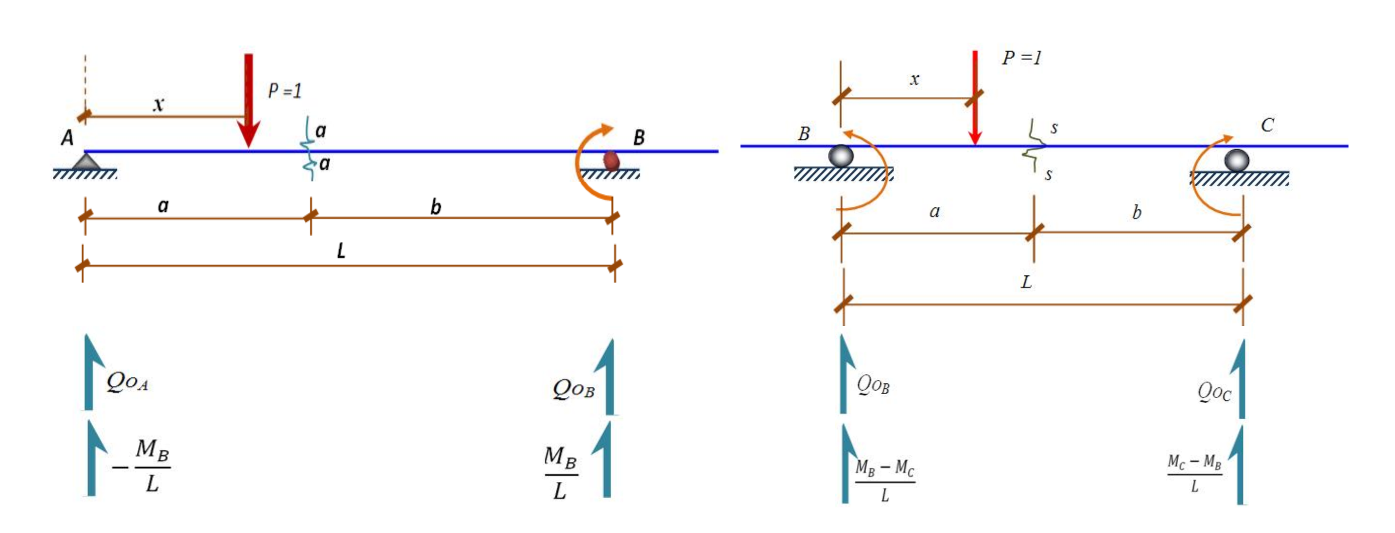


Figura 29.- Superposición de efectos para el Esfuerzo de Corte.

Líneas de influencia de vigas con rigidez Infinita sobre apoyos elásticos.- Su aplicación va directamente a los diafragmas de puente por ser vigas altas en relación a su luz lo que permite tratarlas con gran rigidez y como están apoyados en las vigas principales que son muy largas y elásticas el apoyo de los diafragmas resulta elástico.

En las figuras que siguen los apoyos se numeran de derecha a izquierda por razones de signo en el esquema de coordenadas, como se verá a tiempo de hacer las aplicaciones.

En la figura 30 de muestra el diafragma de un puente de n vigas, en el que actúa una carga.

P = 1 a una distancia β del punto 0 (punto de origen o de referencia).

Una de las vigas principales del puente es el apoyo i cuya abscisa es L. y su flecha o deformada es v_1.

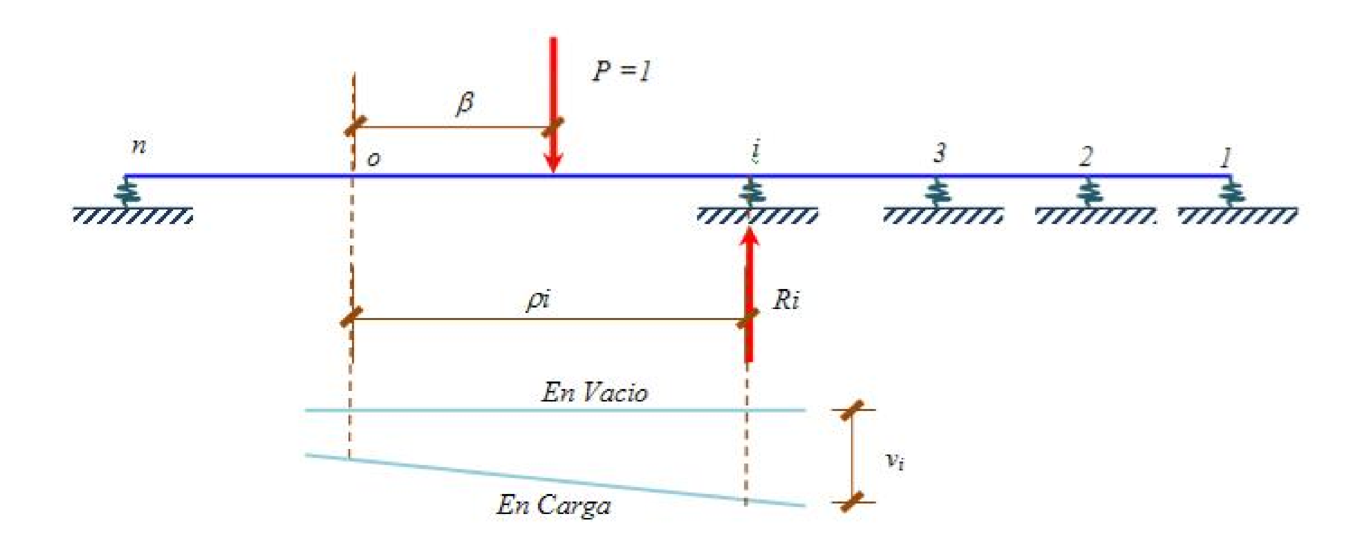


Figura 30.- Viga Rígida sobre apoyos Elásticos.

Por la rigidez de la viga la deformada del conjunto es una línea recta dada por:

$$v_i = a + \mu * b$$

Por otra parte, las reacciones elásticas son proporcionales a las deformaciones:

$$R_i = k_i * v_i$$

Se supone que las n vigas principales son de sección constante es decir k_i = k, lo propio sus espaciamientos s son iguales y finalmente tomando el origen de coordenadas al centro del diafragma con lo que $\sum \mu_i = 0$, se obtiene la siguiente expresión general para la línea de influencia de las reacciones elásticas en el apoyo i (ver figura 31).

$$R_i = \frac{P}{n}\left(1 + 6 * \left(\frac{n + 1 - 2 * i}{n^2 - 1}\right)\frac{\beta}{s}\right)$$

En la expresión anterior:

R_i = Reacción en el apoyo en cuestión.

P = Carga puntual unitaria.

n = Número de apoyos.

i = Número del apoyo controlado de derecha a izquierda.

β = Brazo de la carga P al centro del diafragma.

s = Separación entre ejes de las vigas principales.

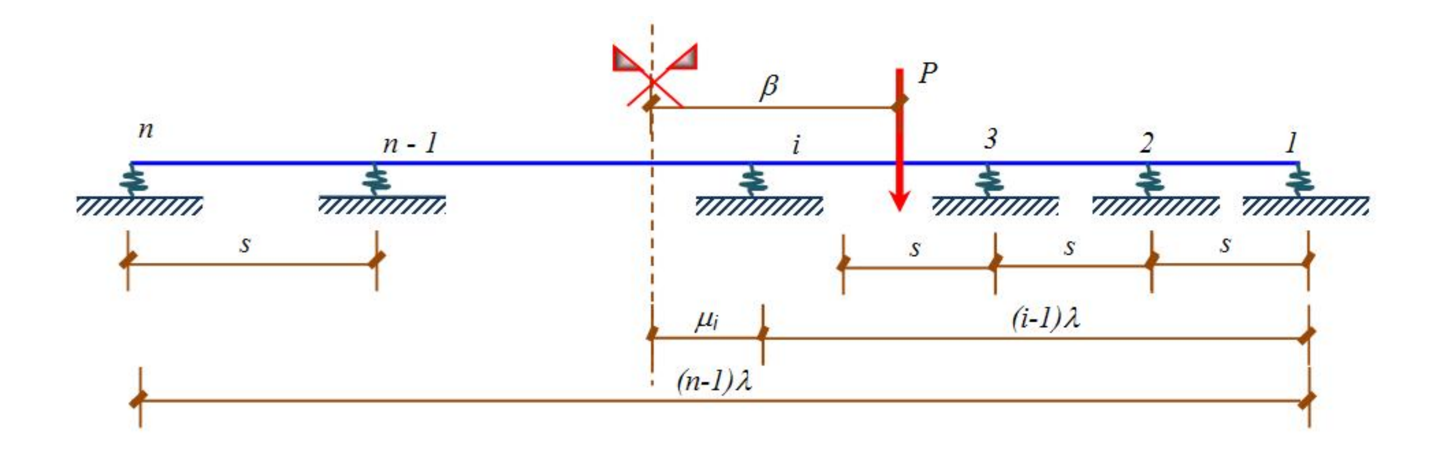


Figura 31.- Viga sobre apoyos elásticos con las condiciones de simetría.

En base a la ecuación anterior, es posible determinar las líneas de influencia tanto para momento flexor como para corte en cualquier otra sección del diafragma.

Ejercicio.- A manera de explicación del procedimiento sea el caso de un diafragma de dos tramos en el que se pide calcular las líneas de influencia de las reacciones 1 a 3 y el corte y momento flexor ubicados a una distancia x del centro (ver figuras 32).

La determinación de las líneas de influencia de las reacciones es directa, ya que es suficiente reemplazar en la ecuación anterior los valores correspondientes a cada caso:

$$R_1 \begin{cases} \beta = s \longrightarrow {}^{s}/_{6} \;\; P \\ \beta = 0 \longrightarrow {}^{1}/_{6} \;\; P \\ \beta = -s \longrightarrow -{}^{1}/_{6} \;\; P \end{cases}$$

$$R_2 \begin{cases} \beta = s \longrightarrow {}^{1}/_{3} \;\; P \\ \beta = 0 \longrightarrow {}^{1}/_{3} \;\; P \\ \beta = -s \longrightarrow -{}^{1}/_{3} \;\; P \end{cases}$$

$$R_3 \begin{cases} \beta = s \longrightarrow {}^{1}/_{6} \;\; P \\ \beta = 0 \longrightarrow {}^{1}/_{3} \;\; P \\ \beta = -s \longrightarrow {}^{s}/_{6} \;\; P \end{cases}$$

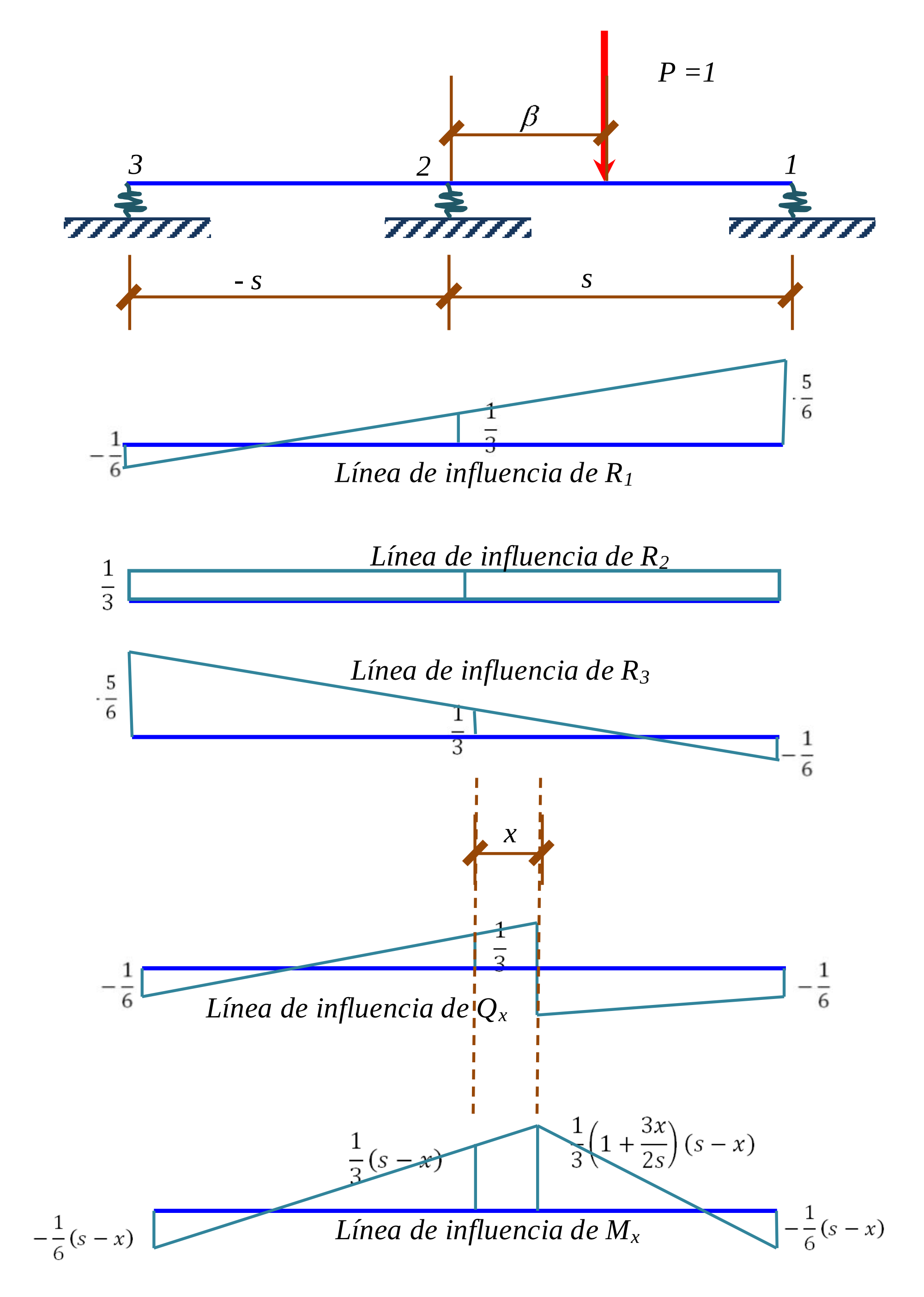


Figura 32.- Líneas de Influencia de un Diafragma de dos tramos iguales.

$$R_1 = \frac{P}{3}\left(1 + 6 * \left(\frac{2}{8}\right)\frac{\beta}{s}\right) = \frac{P}{3}\left(1 + \frac{3}{2}\frac{\beta}{s}\right)$$

$$R_2 = \frac{P}{3}\left(1 + 6 * (0)\frac{\beta}{s}\right) = \frac{P}{3}(constante)$$

$$R_3 = \frac{P}{3}\left(1 + 6 * \left(\frac{-2}{8}\right)\frac{\beta}{s}\right) = \frac{P}{3}\left(1 - \frac{3}{2}\frac{\beta}{s}\right)$$

Se trata de ecuaciones lineales en las que se discuten 3 puntos según se detalla en la figura 32.

Con el mismo criterio se tiene que para el esfuerzo cortante:

$$x > \beta \qquad ; \qquad V = R_1$$

$$x < \beta \qquad ; \qquad V = R_1 - P$$

Y para el momento flector:

$\beta > x$;

$$M = \frac{P}{3}\left(1 + \frac{3}{2}\frac{\beta}{s}\right)(s - x) - P * (\beta - x)$$

$\beta < x$;

$$M = \frac{P}{3}\left(1 + \frac{3}{2}\frac{\beta}{s}\right)(s - x)$$

Para la línea de influencia del momento flector en x, se discuten los siguientes puntos:

$\beta = -s$;

$$M = \frac{P}{6}(s - x)$$

$\beta = 0$;

$$M = \frac{P}{3}(s - x)$$

$\beta = x$;

$$M = \frac{P}{3}\left(1 + \frac{3}{2}\frac{x}{s}\right)(s - x)$$

$\beta = s$;

$$M = \frac{P}{3}\left(\frac{5}{2}\right)(s - x) - P * (s - x) = -\frac{P}{6}(s - x)$$

Aplicación.- En un puente isostático de 20 m. de luz, con 3 vigas principales (ver figura 33), se pide calcular momentos flectores en su diafragma central.

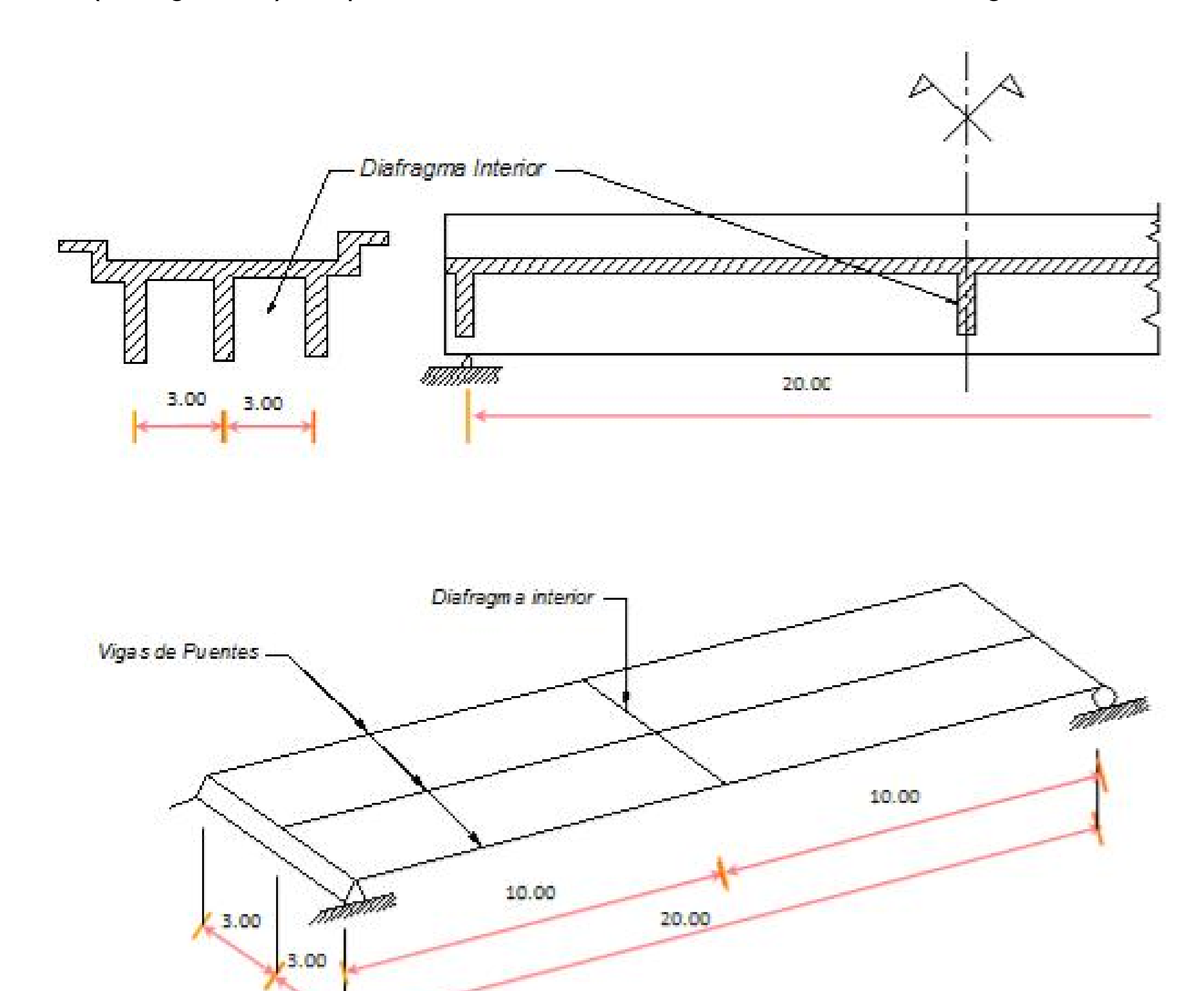


Figura 33.- Diafragma interior en un Puente de 20 m.

Para el camión tipo MS18 y a manera de hacer comparaciones, se pide calcular momentos máximos para los siguientes casos:

- ***a)*** Momentos al centro del diafragma
- ***b)*** Momento máximo definido por el teorema de Barre.
- ***c)*** Momento máximo maximorum definido por el teorema de Courbon.

Para esta aplicación es preciso recurrir a conceptos que son detallados en el capítulo tercero y así se tiene que el impacto esta dado por:

$$l = \frac{15}{L + 38} = \frac{15}{20.0 + 38} = 0.259 \quad \rightarrow 25.9\,\%$$

Siendo:

I = Porcentaje de carga viva por concepto de impacto.

L = Luz del tramo en metros.

Por otra parte los esquemas del camión MS18 son los que se detallan en la figura 34.

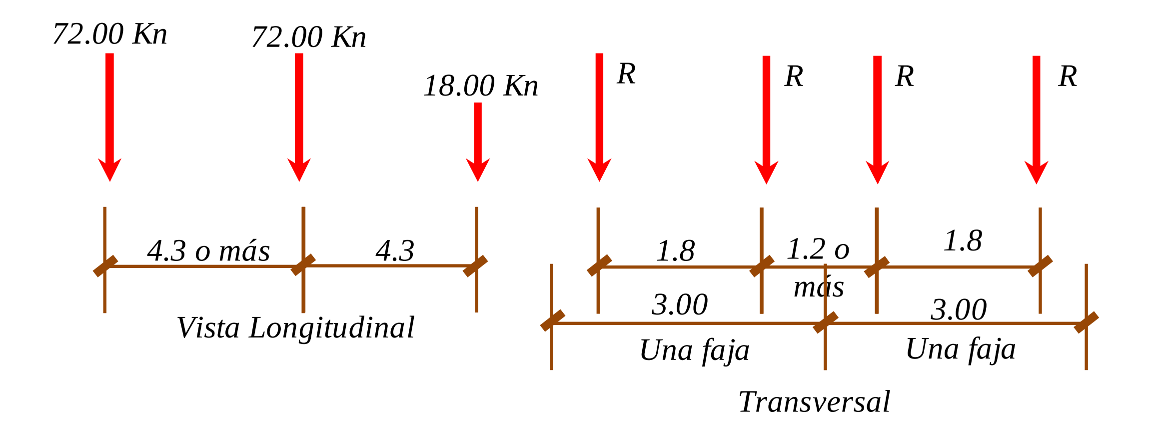


Figura 34.- Esquema de los Caminos tipo MS18

El presente es un caso particular porque el diagrama es perpendicular al sentido del tráfico y en consecuencia es necesario calcular previamente las reacciones de las filas de ruedas que corresponden a dos fajas de tráfico.

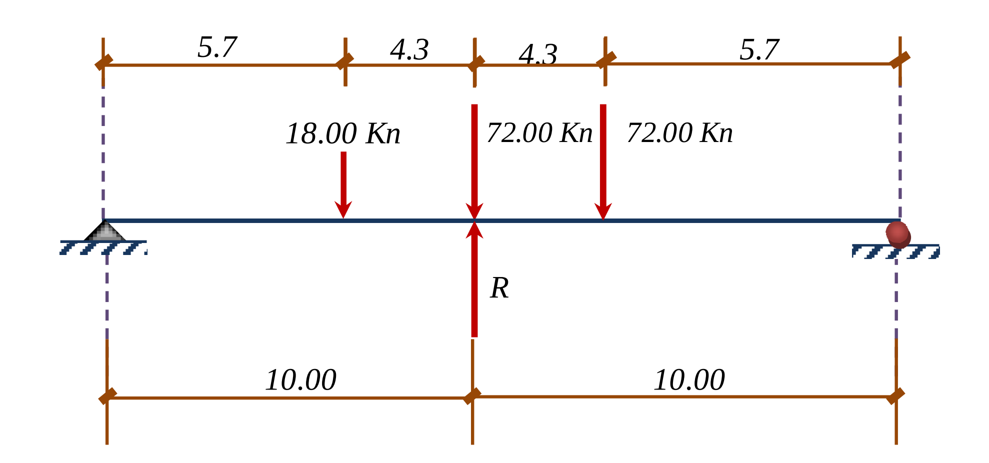


Figura 35.- Reacción por fila de Ruedas sobre el Diafragma

Se asume dos tramos isostáticos que descargan en R, con lo que:

$$R = \frac{18 * 5.7 + 72 + 5.7}{10.0} + 72 = 123.3\ Kn$$

Este valor debe ser incrementado por el impacto:

$$R = 1.2590 * 123.3 = 155.23\ Kn$$

a) Para evaluar el momento al medio del diafragma, se tiene que x = 0 con lo que la ecuación de la línea de influencia basada en la figura 36, será para:

$\beta < 0$;

$$M = \frac{P}{3}\left(1 + \frac{3}{2}\frac{\beta}{s}\right) * s$$

Para M = 0;

$$\beta_1 = \beta_2 = \frac{2}{3}s$$

Y para $\beta > 0$;

$$M = \frac{P}{3}\left(1 + \frac{3}{2}\frac{\beta}{s}\right) * s - P * \beta$$

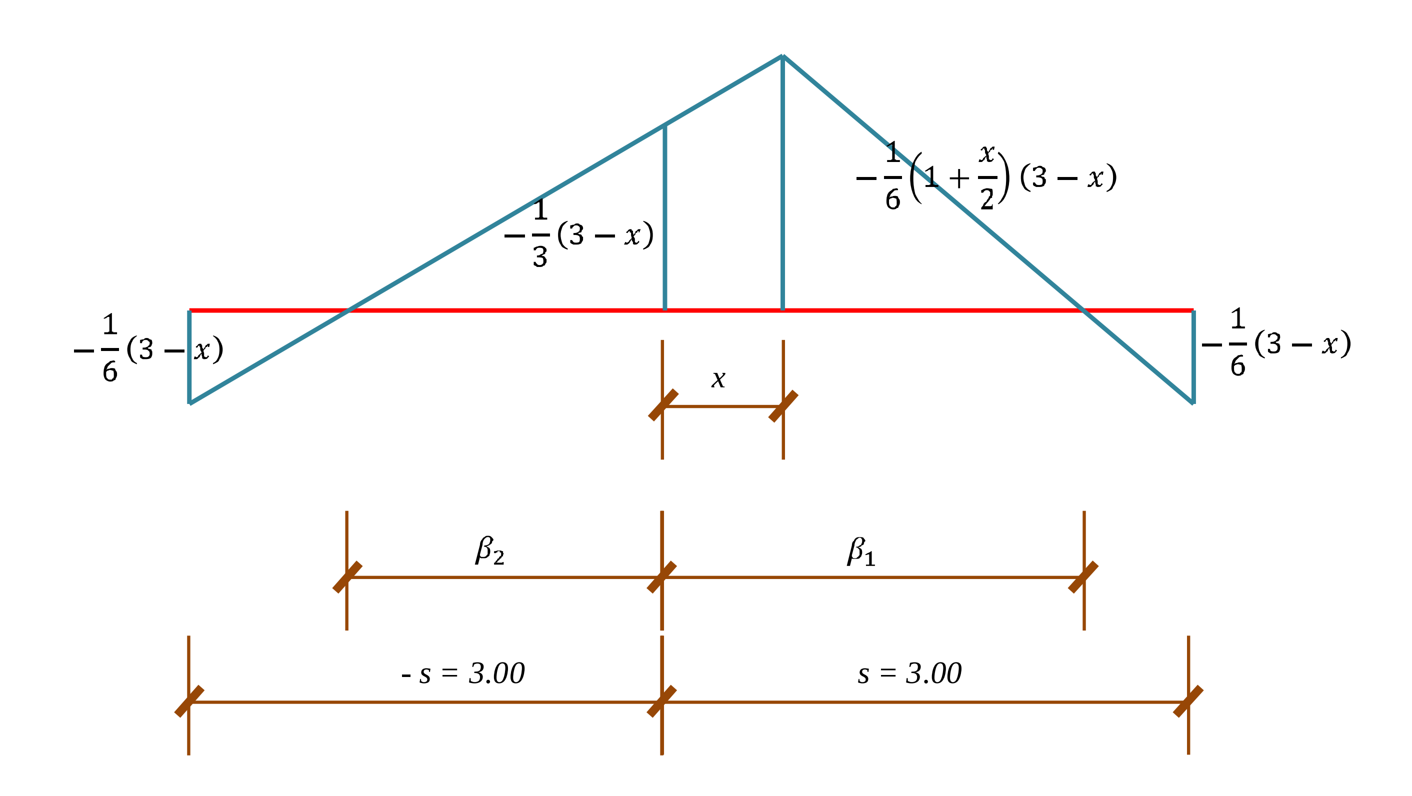


Figura 36.- Línea de Influencia del momento en x.

Reemplazando valores y ubicando los dos camiones, se tiene:

1.8 1.2 1.8

155.23 Kn 155.23 Kn 155.23 Kn 155.23 Kn

-0.5 0.4 1.0 0.1 -0.5

0.8 1.2 1.8 0.2

- s = 3.00 s = 3.00

Figura 37.- Línea de influencia sobre el apoyo interior.

El momento al centro del diafragma para las dos fajas de tráfico valdrá:

$$M = 155.23 * (-0.5 + 0.4 + 1 + 0.1) = 155.23\ Kn - m$$

b) Para encontrar el momento máximo según el teorema de Barré, se determina la posición de los camiones de la siguiente manera: “Cuando se tienen varias cargas puntuales, se busca la ubicación de su resultante para luego colocar es tas cargas, de manera que el centro de simetría del tramo quede en medio de la distancia entre la posición de la resultante y la carga más próxima a ella, para así obtener el momento máximo en coincidencia con la carga anteriormente especificada”.

Aplicando este teorema al conjunto de las 4 filas de ruedas se tiene el esquema de la figura 38.

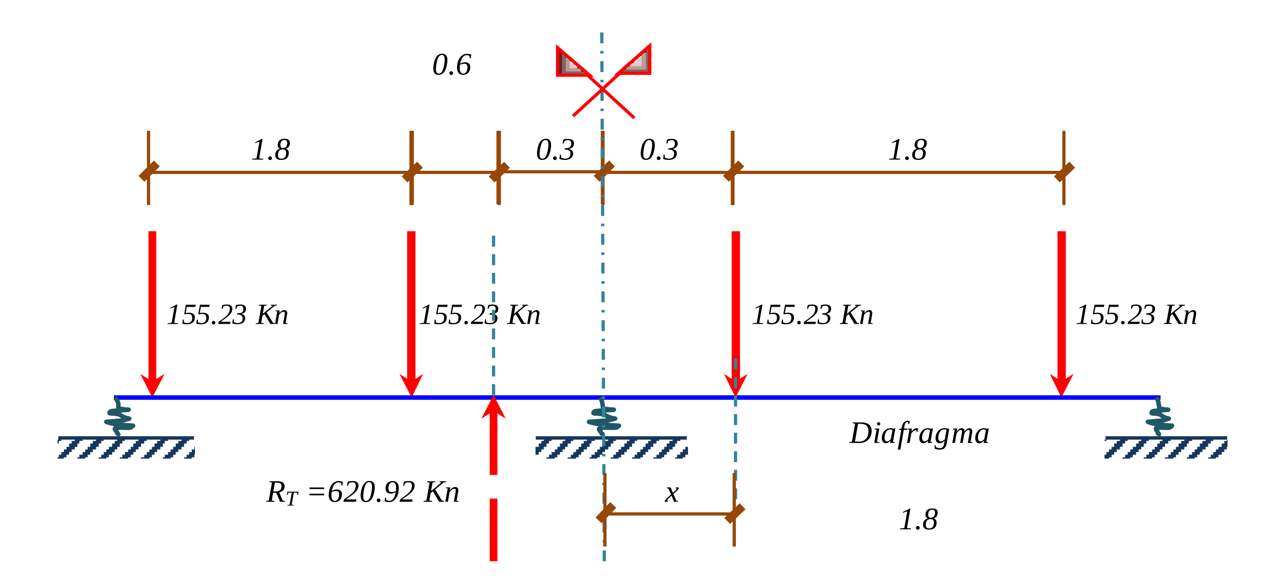


Figura 38.- Ubicación de los dos camiones según el teorema de Barré

Se obtiene para este caso que x = 0.3 m., con lo que se calculan las coordenadas y se colocan los camiones en la posición más desfavorable que es la que se detalla en la figura 39.

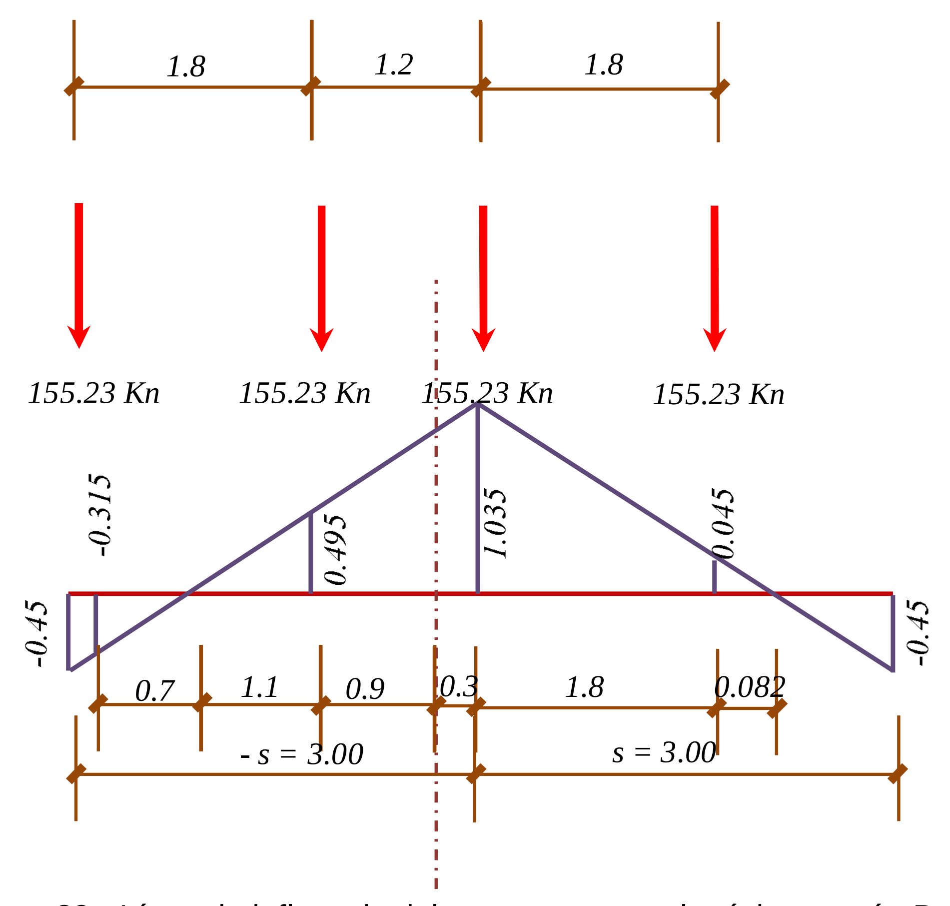


Figura 39.- Línea de influencia del momento para el máximo según Barré.

El momento máximo que se obtiene en este caso será:

$$M = 155.23 * (-0.315 + 0.495 + 1.035 + 0.045) = 195.59\ Kn - m.$$

Valor que como se puede observar es mayor al calculado para el medio, pero como se ve en el caso siguiente no es predominante.

c) Para las dos fajas de tráfico, se tiene que el momento máximo se presenta en correspondencia con una de las filas de ruedas interiores, o sea dada la simetría en A ó en B de acuerdo con la figura 40.

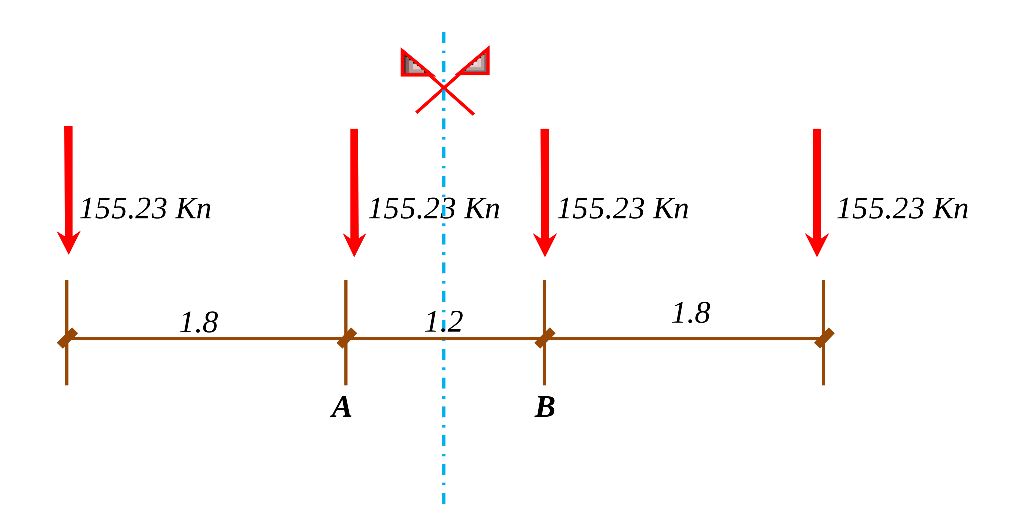


Figura 40.- Reacciones de dos vehículos sobre el diafragma.

Según Courbon, la distancia x a la cual el momento es máximo está dada por:

$$x = e + d$$

Con

$$e = \frac{s}{6} - \frac{d}{2}$$

d = Distancia de una de las filas de ruedas interiores al centro de gravedad del conjunto de filas de ruedas.

Se tiene por tanto:

$$d = \frac{1.2}{2} = 0.6\ m.$$

$$e = \frac{3.0}{6} - \frac{0.6}{2} = 0.2\ m.$$

$$x = 0.2 + 0.6 = 0.80\ m.$$

Reemplazando estos valores en las ordenadas del diagrama de momentos que se muestran en la figura 36.

$$-\frac{1}{6}(s-x) = -\frac{1}{6}(3.0-0.8) = -0.3667\ m.$$

$$\frac{1}{3}\left(1+\frac{3*x}{2*s}\right)(s-x) = \frac{1}{3}\left(1+\frac{3*0.8}{2*3.0}\right)(3.0-0.8) = 1.0267\ m.$$

Las distancias $\beta_1\ y\ \beta_2$ se las obtiene para M = 0, en las ordenadas de la línea de influencia de momentos o también por proporcionalidad de triángulos.

El momento máximo maximorun para las dos fajas de tráfico cargadas valdrá entonces:

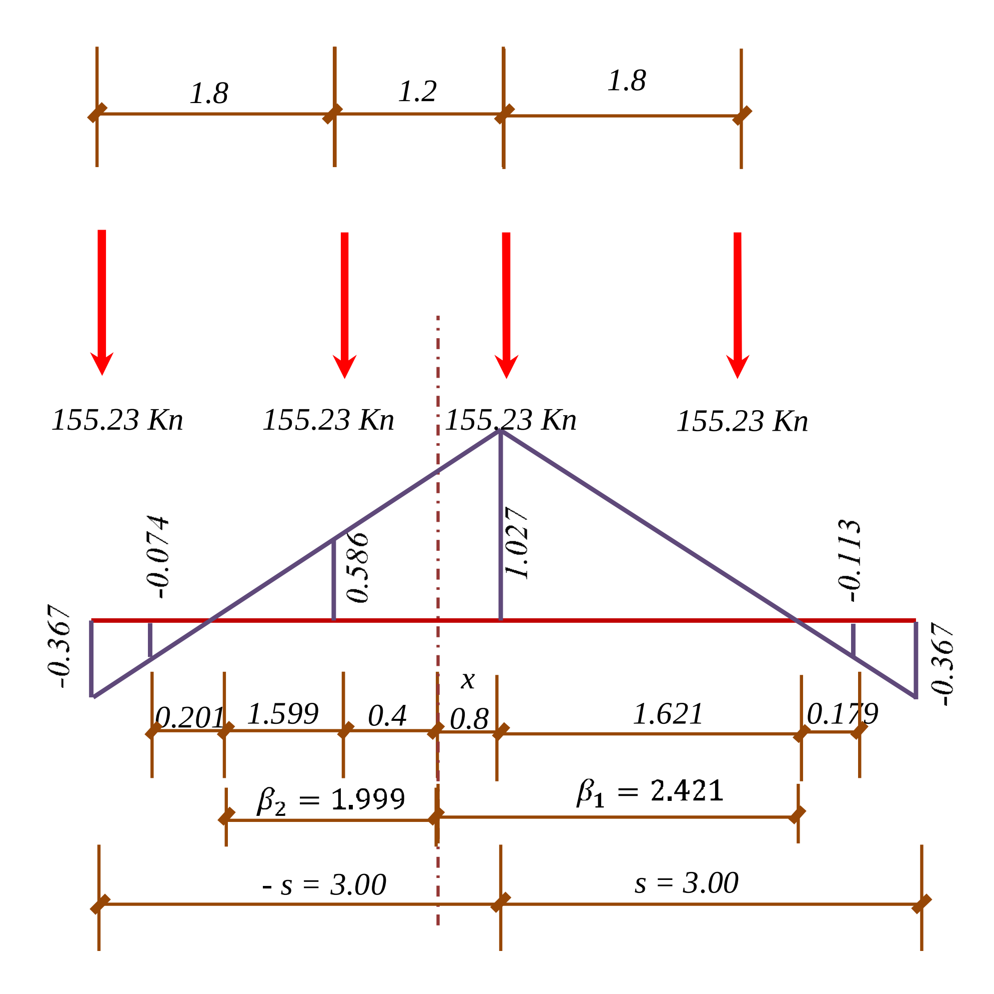


Figura 41.- Camiones en posición para el máximo maximorum.

$$M = 155.23.(-0.074+0.586+1.027-0.113) = 221.36\ Kn-m.$$

Que como se puede observar es *mayor* a los obtenidos en los dos casos anteriores, en consecuencia en la práctica solo se debe aplicar este último procedimiento.

Por otra parte, en los tres ejemplos anteriores se observa que alguna de las filas de ruedas pisa en sectores negativos por ello es conveniente analizar también para este último caso con una sola faja de tráfico, con lo que se obtiene:

$$d_i = \frac{1.8}{2} = 0.9\ m.$$

$$e = \frac{3}{6} - \frac{0.9}{2} = 0.05\ m.$$

$$x = 0.90 + 0.05 = 0.95\ m.$$

Dibujando y cargando la correspondiente línea de influencia, se obtiene:

$$M = 155.23 * (0.393 + 1.008) = 217.48 < 221.36\ Kn - m$$

En algunos capítulos posteriores se muestran otros casos particulares de líneas de influencia